# Konvergenzsätze für Folgen und Reihen

**3.37** Bolzano-Weierstraß: Eine beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

**3.39** Monotone Konvergenz: Eine nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge ist konvergent.

**3.42** Cauchy Konvergenzkriterium: Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

**3.47** Geometrische Reihe: Die geometrische Reihe zu q mit |q|<1 ist konvergent.

**3.49** Majorantenkriterium: Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern, die nach oben durch Glieder einer konvergente Reihe beschränkt sind, konvergiert.

**3.49** Cauchy Konvergenzkriterium: Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| \to 0 \quad (n \to \infty, m > n)$$

**3.52** Leibnitz Konvergenzkriterium für alternierende Reihen.

**3.56** Majorantenkriterium für absolute Konvergenz.

**3.57** Quotientenkriterium für absolute Konvergenz.

**3.59** Wurzelkriterium für absolute Konvergenz.

# Umordnung von Reihen

Betrachte unendliche Matrix $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}, a_{ij} \in \mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Wir wollen die unendliche Summe der Einträge betrachten.

Verschiedene Möglichkeiten die Einträge aufzuzählen.

# Aufzählung entlang Quadraten.

$$\left(\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
a_{21} & \leftarrow & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
a_{31} & \rightarrow & a_{32} & \rightarrow & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
a_{41} & \leftarrow & a_{42} & \leftarrow & a_{43} & \leftarrow & a_{44} & & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}\right)$$

Führt auf Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ mit

$$\sum_{i=1}^{k^2} b_i = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}$$

## Aufzählung entlang Diagonalen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Führt auf Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ mit

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}k(k+1)} c_i = \sum_{j=1}^{k} d_j, \quad d_j = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j-i+1}$$

**Frage:**

Wann gilt Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_i$$

und wann ist $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ wohldefiniert?

<u>Satz 3.60</u>:

Umordnungen einer absolut konvergenten Reihe sind absolut konvergent.

Damit gilt oben Gleichheit, falls eine der Reihen absolut konvergiert.

**Satz 3.60.**

Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent Reihe und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann ist auch die umgeordnete Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)}$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)}$$

Bew.: Hatten bereits gezeigt: Zu beliebig vorgegebem $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon,$$

$$\sum_{i=K+1}^{\infty} |a_{\varphi(i)}| < \varepsilon \qquad \text{für } K = \max\{\varphi^{-1}(1), ..., \varphi^{-1}(N)\}.$$