Kapitel 5. Die trigonometrischen Funktionen

5.1. Die komplexen Zahlen

5.2. Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$

5.10. Definition. Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent gegen $c \in \mathbb{C}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|c_n - c| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

5.11. Satz. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $c_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann (in $\mathbb{C}$), wenn beide Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren (in $\mathbb{R}$).
Falls $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweis. Folgte mit Hilfe der Definition und der Eigenschaft des Betrages

$$\max\left\{|x_n - x|, |y_n - y|\right\} \leq |c_n - c| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

für $c_n = x_n + iy_n$, $c = x + iy$. □

5.13. Definition. Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|c_n - c_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

5.14. Satz. Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, $c_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, ist genau dann eine Cauchy-Folge (in $\mathbb{C}$), wenn beide Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen (in $\mathbb{R}$) sind.

Beweis. Analog zu 5.11. □

5.15. Satz. In $\mathbb{C}$ sind alle Cauchy-Folgen konvergent (das heißt $\mathbb{C}$ ist *vollständig*).

Beweis. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$, $c_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{C} &\Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sind Cauchy-Folgen in } \mathbb{R} && \text{(Satz 5.14)}\\
&\Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sind konvergent in } \mathbb{R} && (\mathbb{R} \text{ vollständig})\\
&\Leftrightarrow (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent in } \mathbb{C}. && \text{(Satz 5.11)}
\end{aligned}$$

□

5.16. Satz. Seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Dann sind auch $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(c_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergent und es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(c_n + d_n) &= \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n,\\
\lim_{n\to\infty}(c_n d_n) &= \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \lim_{n\to\infty} d_n.
\end{aligned}$$

Ist außerdem $\lim_{n\to\infty} d_n \neq 0$ so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, die Folge $(\frac{c_n}{d_n})_{n\geq n_0}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} c_n}{\lim_{n\to\infty} d_n}.$$

Beweis. Analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen im reellen Fall. □

5.17. Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ komplexer Zahlen heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$, in $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert.

5.18. Proposition. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent.

Beweis. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, so ist $(\sum_{k=1}^{n} |c_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Es gilt weiter für $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$ und $n < m$

$$|s_n - s_m| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m} c_k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |c_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} |c_k| - \sum_{k=1}^{m} |c_k|\right|.$$

Dann ist also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ und nach Satz 5.15 konvergent. □

5.19. Satz (Majorantenkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Weiter sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe komplexer Zahlen und es gelte $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.

BEWEIS. Analog zum rellen Fall. □

5.20. Satz (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine Reihe komplexer Zahlen mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Es gebe ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, sodass

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \theta \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.

BEWEIS. Wie im reellen Fall. □

5.21. Satz. Seien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ zwei absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$e_n := \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} d_n\Big).$$

BEWEIS. Wie im reellen Fall. □

5.22. Satz (Exponentialreihe im Komplexen). Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

BEWEIS. Wie im reellen Fall mit dem Quotientenkriterium. □

5.23. Satz (Funktionalgleichung). Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2).$$

Insbesondere gilt $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

BEWEIS. Analog zum reellen Fall mit Satz 5.21. □

5.24. Proposition. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Beweis. Setze

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \qquad s_n^*(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}.$$

Nach den Rechenregeln für die Konjugation gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{s_n(z)} = s_n^*(z).$$

Dann folgt mit Korollar **5.12**, dass

$$\overline{\exp(z)} = \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} = \lim_{n\to\infty} s_n^*(z) = \exp(\overline{z}).$$

□

5.25. Definition. Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf D mit komplexen Werten. Dann heißt f stetig in $z \in D$, falls

$$\lim_{\substack{w\to z\\ w\in D}} f(w) = f(z).$$

5.26. Satz. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Stetigkeit an $z = 0$. Es gilt

$$|\exp(w) - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w|^n}{n!} \le |w| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|w|^m}{(m+1)!} \le |w| \exp(|w|).$$

Damit folgt $\exp(w) \to \exp(0) = 1$ für $w \to 0$ in $\mathbb{C}$.
Mit Hilfe der Funktionalgleichung folgt für $z \in \mathbb{C}$ beliebig, dass

$$|\exp(w) - \exp(z)| = |\exp(z)| \cdot |\exp(w-z) - 1| \to 0$$

für $w \to z$, $w \in \mathbb{C}$ wegen der Stetigkeit von exp in $0 \in \mathbb{C}$. □

5.3. Sinus und Kosinus

5.27. Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos(x) := \mathrm{Re}(\exp(ix)), \qquad \sin(x) := \mathrm{Im}(\exp(ix))$$

für $x \in \mathbb{R}$.

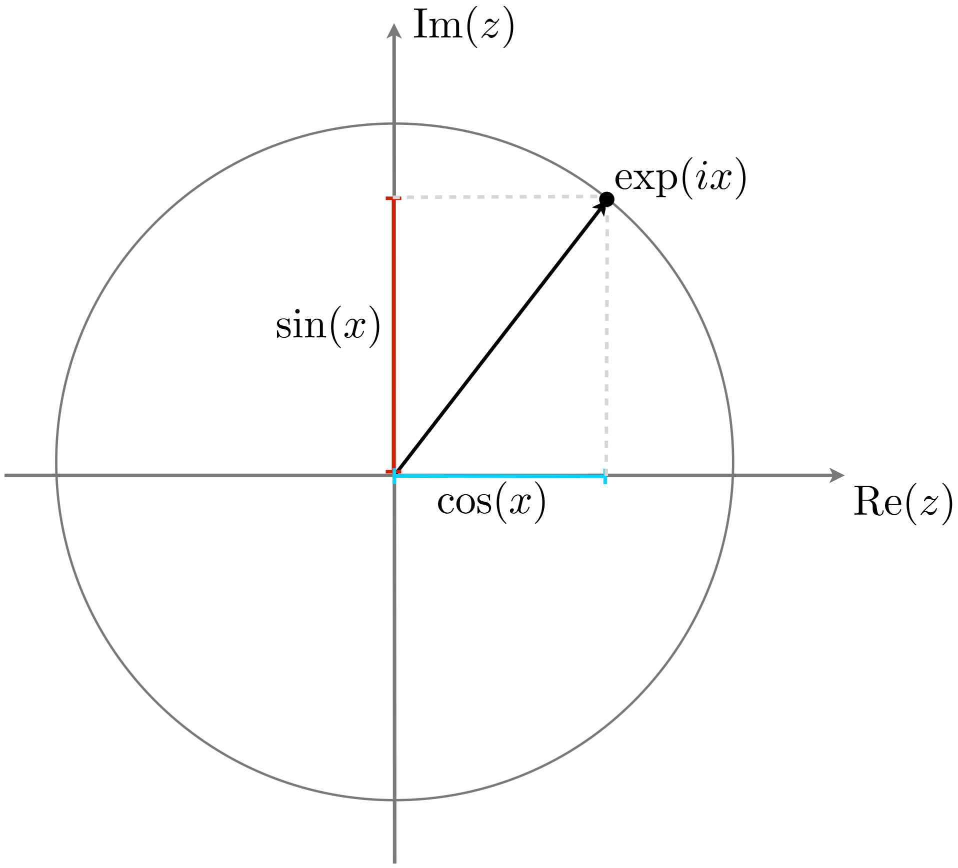

ABBILDUNG 1. Sinus und Kosinus am Einheitskreis

5.28. Bemerkung. Damit gilt die *Eulersche Formel*

$$\exp(ix) \;=\; \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|\exp(ix)|^2 \;=\; \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)} \;=\; \exp(ix)\cdot\exp(-ix) \;=\; \exp(0) \;=\; 1,$$

und damit $|\exp(ix)| = 1$. Daher liegt $\exp(ix)$ auf dem *Einheitskreis* in der Gaußschen Zahlenebene und Kosinus bzw. Sinus sind die Koordinaten des Punktes $\exp(ix)$ auf der reellen bzw. imaginären Achse.

5.29. Satz. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\cos(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(\exp(ix) + \exp(-ix)\big), \qquad \sin(x) \;=\; -\frac{i}{2}\big(\exp(ix) - \exp(-ix)\big),$

(ii) $\cos(-x) \;=\; \cos(x), \qquad \sin(-x) \;=\; -\sin(x),$

(iii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) \;:=\; \big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2 \;=\; 1.$

Beweis. (i), (ii) folgen aus der Definition von sin, cos und aus $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$. (iii) folgt aus $|\exp(ix)| = 1$. □

5.30. Satz. Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0\,(n \to \infty)$.
Dann gilt $ix_n \to ix_0\,(n \to \infty)$ und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \exp(ix_n) = \exp(ix_0).$$

Mit Satz 5.11 ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \cos(x_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(\exp(ix_n)) = \operatorname{Re}(\exp(ix_0)) = \cos(x_0)$$

und entsprechend $\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \sin(x_0)$. □

5.31. Satz (Additionstheoreme)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \\ \sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y). \end{aligned}$$

Beweis. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\exp\big(i(x+y)\big) = \exp(ix)\cdot\exp(iy)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \operatorname{Re}\big(\exp\big(i(x+y)\big)\big) = \operatorname{Re}\big(\exp(ix)\cdot\exp(iy)\big) \\ &= \operatorname{Re}\big(\exp(ix)\big)\operatorname{Re}\big(\exp(iy)\big) - \operatorname{Im}\big(\exp(ix)\big)\operatorname{Im}\big(\exp(iy)\big) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Entsprechend beweist man das Additionstheorem für die Sinus-Funktion. □

5.32. Korollar. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x-y}{2}\Big), \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x-y}{2}\Big). \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir setzen

$$u := \frac{x+y}{2}, \qquad v := \frac{x-y}{2},$$

sodass $x = u + v$, $y = u - v$. Es folgt dann mit Satz 5.31

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(y) &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\
&= \cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v) - \Big(\cos(u)\sin(-v) + \sin(u)\cos(-v)\Big) \\
&= 2\cos(u)\sin(v) \;=\; 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Identität ist ähnlich. □

5.33. Satz. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Beide Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

BEWEIS. Die absolute Konvergenz folgt mit dem Majorantenkriterium aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Für die Potenzen von i gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

Damit ergibt sich für die Exponentialreihe

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{4k+3}}{(4k+3)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \Big[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big].
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus der Definition von $\sin(x), \cos(x)$. □

5.34. Proposition. Es gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

BEWEIS. Es ist für $x \neq 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = -|x|^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+3)!}$$

und damit

$$\Big|\frac{\sin(x)}{x} - 1\Big| \;\le\; |x|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k+3)!} \;\le\; |x|^2 \exp(|x|).$$

Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \Big|\frac{\sin(x)}{x} - 1\Big| \;=\; 0$$

und somit die Behauptung. □

5.35. Lemma. Es gilt

(i) $\cos(2) < 0,$

(ii) $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,2],$

(iii) $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend in $[0,2].$

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned} \cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \Big(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\Big) - \ldots \\ &< 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

denn es gilt für alle $k \ge 1$ dass $\frac{2^k}{k!} > \frac{2^{k+2}}{(k+2)!}$.

(ii) Es ist für $0 \le x \le 2$

$$\sin(x) \;=\; x\Big[1 - \frac{x^2}{6} + \Big(\frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\Big) + \Big(\frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!}\Big) + \ldots\Big] \;\ge\; \frac{x}{3}$$

denn für $0 \le x \le 2$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{x^k}{(k+1)!} - \frac{x^{k+2}}{(k+3)!} \;=\; \frac{x^k}{(k+3)!}\Big((k+2)(k+3) - x^2\Big) \;\ge\; 0.$$

(iii) Mit Korollar 5.32 und (ii) folgt für alle $0 \le x < y \le 2$

$$\cos(y) - \cos(x) \;=\; -2\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sin\Big(\frac{y-x}{2}\Big) \;<\; 0.$$

□

5.36. Satz. Die Funktion cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle t_0. Wir definieren dann $\pi := 2t_0$.

Beweis. Da cos stetig und $\cos(0) = 1$ sowie $\cos(2) < 0$ existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $t_0 \in (0,2)$. Da cos streng monoton fallend in $[0,2]$ ist diese Nullstelle eindeutig.

□