5.35. Lemma. Es gilt

(i) $\cos(2) < 0,$

(ii) $\sin(x) > 0 \qquad$ für alle $x \in (0,2]$,

(iii) $x \mapsto \cos(x) \quad$ ist streng monoton fallend in $[0,2]$.

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned}\cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \Big(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\Big) - \ldots \\ &< 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3},\end{aligned}$$

denn es gilt für alle $k \geq 1$ dass $\frac{2^k}{k!} > \frac{2^{k+2}}{(k+2)!}$.

(ii) Es ist für $0 \leq x \leq 2$

$$\sin(x) = x\Big[1 - \frac{x^2}{6} + \Big(\frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\Big) + \Big(\frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!}\Big) + \ldots\Big] \geq \frac{x}{3}$$

denn für $0 \leq x \leq 2$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{x^k}{(k+1)!} - \frac{x^{k+2}}{(k+3)!} = \frac{x^k}{(k+3)!}\Big((k+2)(k+3) - x^2\Big) \geq 0.$$

(iii) Mit Korollar 5.32 und (ii) folgt für alle $0 \leq x < y \leq 2$

$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\big(\frac{x+y}{2}\big)\sin\big(\frac{y-x}{2}\big) < 0.$$

□

5.36. Satz. Die Funktion cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle t_0. Wir definieren dann $\pi := 2t_0$.

Beweis. Da cos stetig und $\cos(0) = 1$ sowie $\cos(2) < 0$ existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $t_0 \in (0,2)$. Da cos streng monoton fallend in $[0,2]$ ist diese Nullstelle eindeutig.

□

5.37. Satz (Spezielle Werte von exp)**.** Für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$\exp(i\frac{\pi}{2}) = i, \quad \exp(i\pi) = -1, \quad \exp(i\frac{3\pi}{2}) = -i, \quad \exp(2\pi i) = 1.$$

BEWEIS. Es ist

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

Weiter ist $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ nach (ii) und damit $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Damit

$$\exp(i\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i.$$

Die anderen Behauptungen folgen aus

$$\exp(i\frac{k\pi}{2}) = \Big(\exp(i\frac{\pi}{2})\Big)^k = i^k$$

mit $k = 2, 3, 4$. □

Damit ergeben sich die folgenden Werte für Sinus und Kosinus:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

5.38. Korollar. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$,

(ii) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,

(iii) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

BEWEIS. Folgt aus den Additionstheoremen Satz 5.31 und obigen Werten. Etwa:

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(x) \cdot 0 - \sin(x).$$

□

5.39. Korollar (Nullstellen von Sinus und Kosinus)**.**

(1) Es gilt $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Es gilt $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

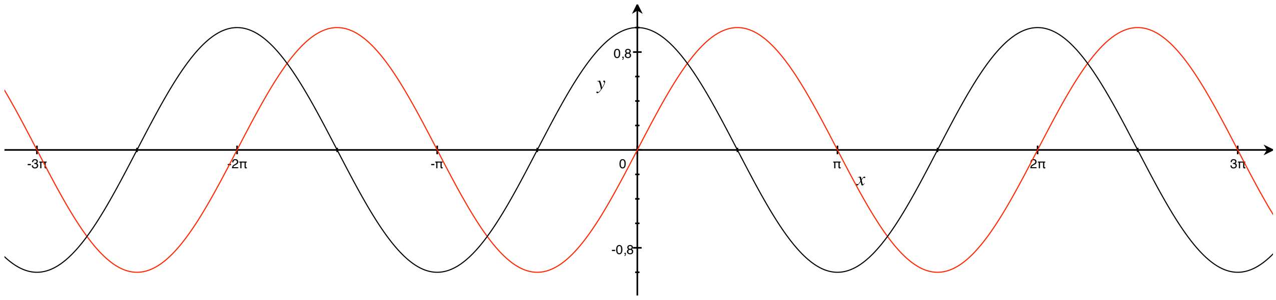

ABBILDUNG 2. Graphen von Sinus (rot) und Kosinus (schwarz)

BEWEIS. Aus Korollar 5.38 folgt, dass $\cos(x) = 0$ falls $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Sei umgekehrt $\cos(x) = 0$. Dann lässt sich x schreiben als $x = k\pi + y$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $-\frac{\pi}{2} < y \leq \frac{\pi}{2}$. Mit Korollar 5.38 folgt dann

$$\cos(y) = (-1)^k \cos(k\pi + y) = (-1)^k \cos(x) = 0.$$

Nach Satz 5.36 ist $\cos(t) \neq 0$ für alle $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ und da Kosinus symmetrisch damit $\cos(t) \neq 0$ für alle $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Aus $\cos(y) = 0$ und $-\frac{\pi}{2} < y \leq \frac{\pi}{2}$ folgt damit $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Die Charakterisierung der Nullstellen des Sinus folgt dann mit Korollar 5.38. □

5.40. Korollar. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$ genau dann $\exp(ix) = 1$, falls $x = k \cdot 2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Folgt aus den vorherigen zwei Korollaren. □

5.4. Weitere trigonometrische Funktionen

5.41. Definition.

(1) Die *Tangensfunktion* ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch
$$\tan x := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$
(2) Die *Kotangensfunktion* ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch
$$\cot x := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

5.42. Satz. [Umkehrfunktionen von Sinus, Kosinus und Tangens]

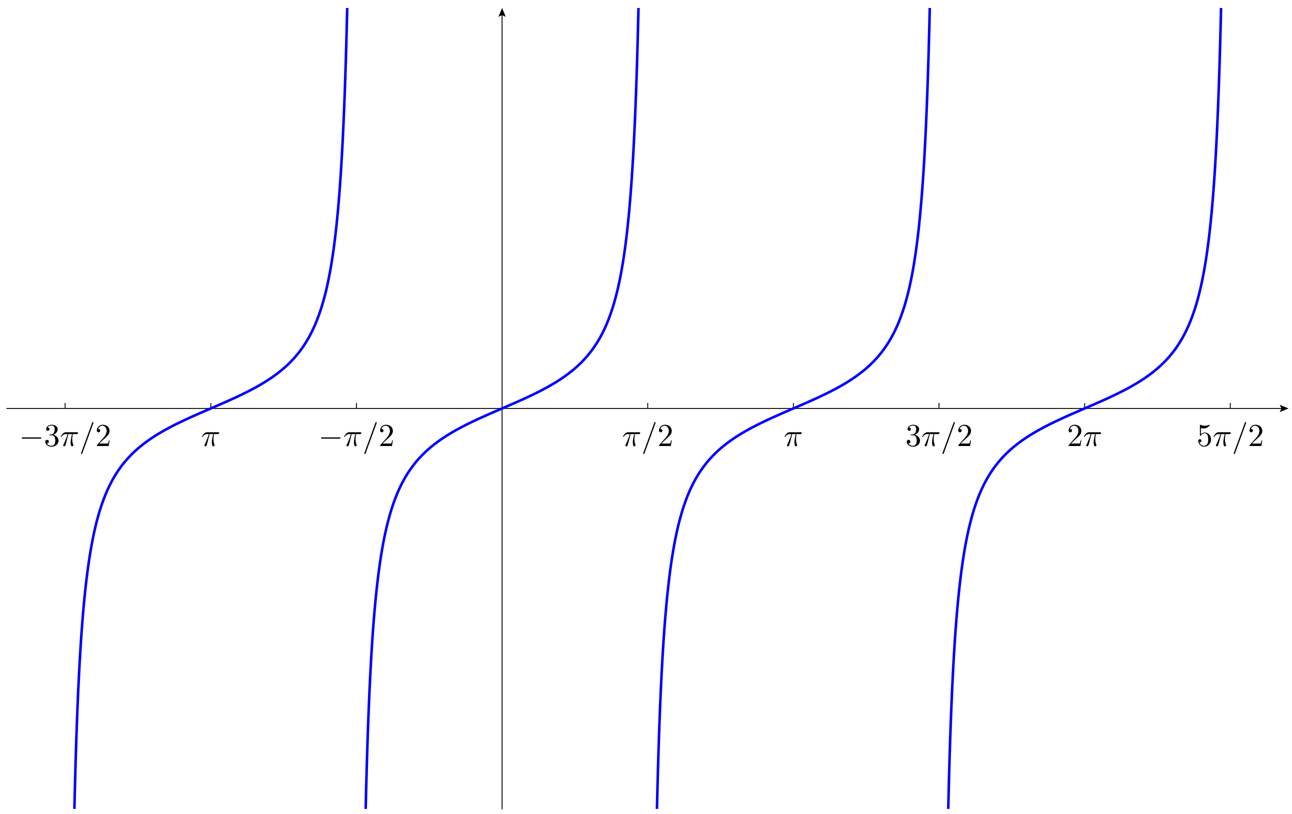

ABBILDUNG 3. Graph des Tangens

(1) Die Funktion cos ist streng monoton fallend im Intervall $[0, \pi]$ und bildet $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

nennen wir Arcus-Kosinus.

(2) Die Funktion sin ist streng monoton wachsend im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und bildet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

nennen wir Arcus-Sinus.

(3) Die Funktion tan ist streng monoton wachsend im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und bildet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

nennen wir Arcus-Tangens.

BEWEIS. (1) Nach Lemma 5.35 ist cos streng monoton fallend auf $[0, 2]$, insbesondere in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Da $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ ergibt sich daraus, dass cos auch streng monoton fällt auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Dann bildet cos das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab.

(2) Das folgt aus der ersten Aussage, da $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$.

(3) Aus (1), (2) folgt, dass tan streng monoton wachsend ist auf $[0, \frac{\pi}{2})$. Da $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt, dass tan auch streng monoton wachsend ist auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ und damit auf ganz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Weiter erhalten wir wegen der Stetigkeit von sin und cos, dass

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1, \qquad \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0, \qquad \cos(x) > 0 \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

und wir sehen dass

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

Da $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty.$$

Damit bildet tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. □

5.5. Polarkoordinaten

5.43. Satz (Polarkoordinaten)**.** Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich schreiben als

$$z = r \cdot \exp i\varphi,$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z|$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot \exp(i\varphi)$ für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$.
Sei im Folgenden $z \neq 0$, $r := |z|$ und setze

$$w := \frac{z}{r}, \quad w_1 := \mathrm{Re}(w), \quad w_2 = \mathrm{Im}(w)$$

Dann ist $|w| = 1$, also $w_1^2 + w_2^2 = 1$. Insbesondere $|w_1| \leq 1$ und

$$\alpha := \arccos w_1$$

ist wohldefiniert und erfüllt $\cos(\alpha) = w_1$. Damit ist

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - w_1^2 = w_2^2.$$

Dann gilt entweder für $\varphi := -\alpha$ oder $\varphi := \alpha$, dass $\sin\varphi \;=\; w_2$. Mit der entsprechenden Wahl von φ folgt

$$\exp(i\varphi) \;=\; \cos\varphi + i\sin\varphi \;=\; w_1 + iw_2 \;=\; w$$

und damit auch $r\exp(i\varphi) \;=\; z$.

Falls für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt, dass $z = r\exp(i\varphi) = r\exp(i\psi)$, so folgt

$$\exp\big(i(\varphi - \psi)\big) \;=\; 1$$

und mit Korollar 5.40 folgt, dass $\psi = \varphi + k \cdot 2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. $\square$