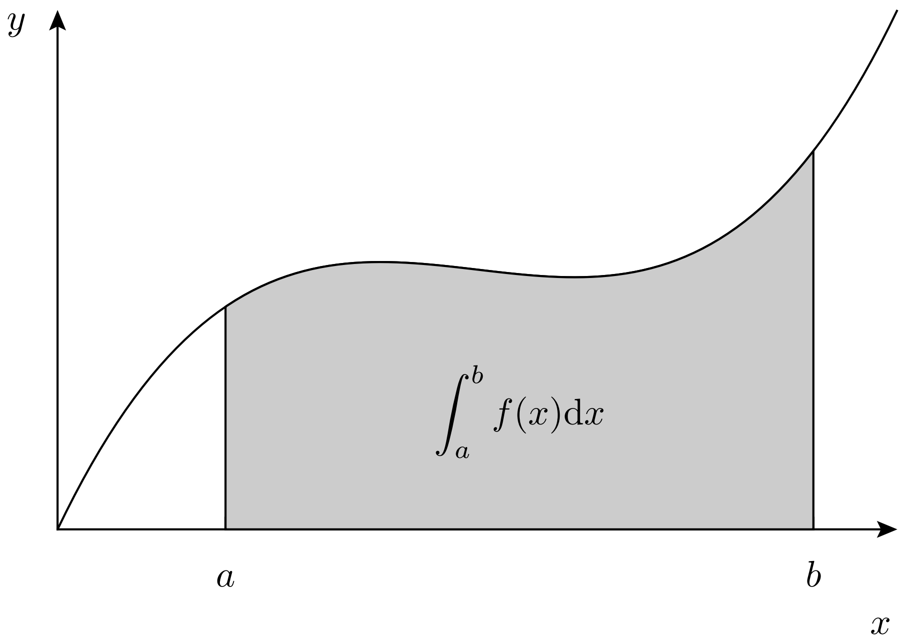


Abbildung 1. Motivation: Das Integral als Fläche unter einem Graphen

## Kapitel 7. Das Riemann Integral

### 7.1. Riemann-integrierbare Funktionen

Sei im Folgenden stets $I = [a, b]$, $a < b$.

**7.1. Definition.** Für $K \in \mathbb{N}$ und Zahlen $x_0, ..., x_K$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_K = b$$

zerlege $I$ disjunkt in $K$ Teilintervalle $I_k$ (offen, halboffen oder abgeschlossen), $k = 1, ..., K$, mit Randpunkten $x_{k-1}$ und $x_k$, also

$$I = \bigcup_{k=1}^{K} I_k, \qquad I_k \cap I_j = \emptyset \text{ for } k \neq j.$$

Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion (bezüglich der Zerlegung $I = \bigcup_{k=1}^{K} I_k$), falls $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ existieren, sodass für alle $k = 1, ..., K$ gilt

$$g(x) = c_k \quad \text{für alle } x \in I_k.$$

Definieren wir für ein Intervall $J \subset I$ die charakteristische Funktion $\mathcal{X}_J$ von $J$ als

$$\mathcal{X}_J : I \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{X}_J(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in J, \\ 0 & \text{falls } x \in I \setminus J, \end{cases}$$


Abbildung 2. Zerlegung von $[a, b]$ mit $K = 7$.

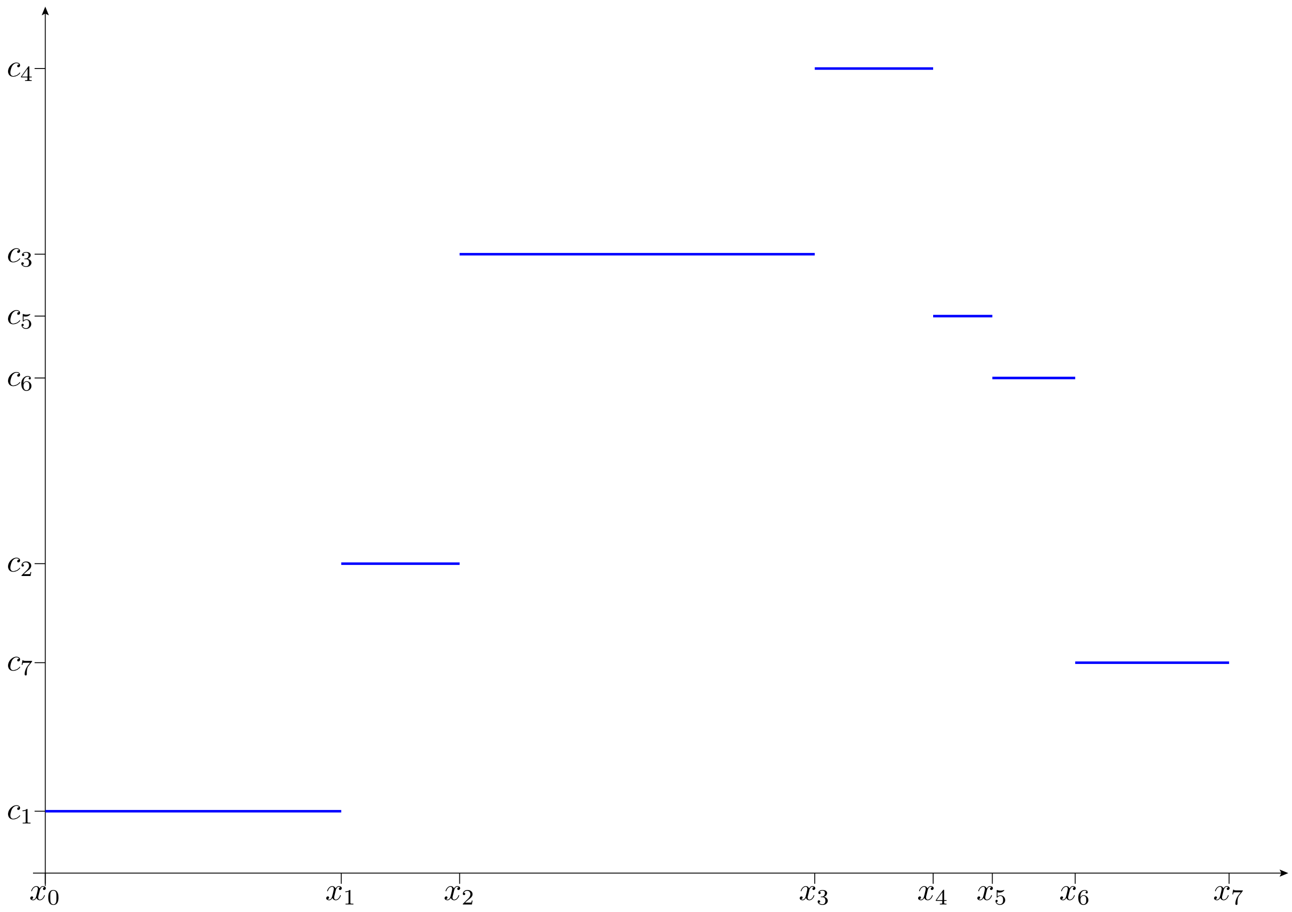


Abbildung 3. Beispiel einer Treppenfunktion

so können wir $g$ schreiben als

$$g \;=\; \sum_{k=1}^{K} c_k \mathcal{X}_{I_k}.$$

**7.2. Definition.** Für eine Treppenfunktion (im Folgenden kurz „TF“)

$$g \;=\; \sum_{k=1}^{K} c_k \mathcal{X}_{I_k}$$

wie in Definition 8.1 definieren wir

$$\int_a^b g(x)\,dx \;:=\; \sum_{k=1}^{K} c_k |I_k| \;=\; \sum_{k=1}^{K} c_k (x_k - x_{k-1}).$$

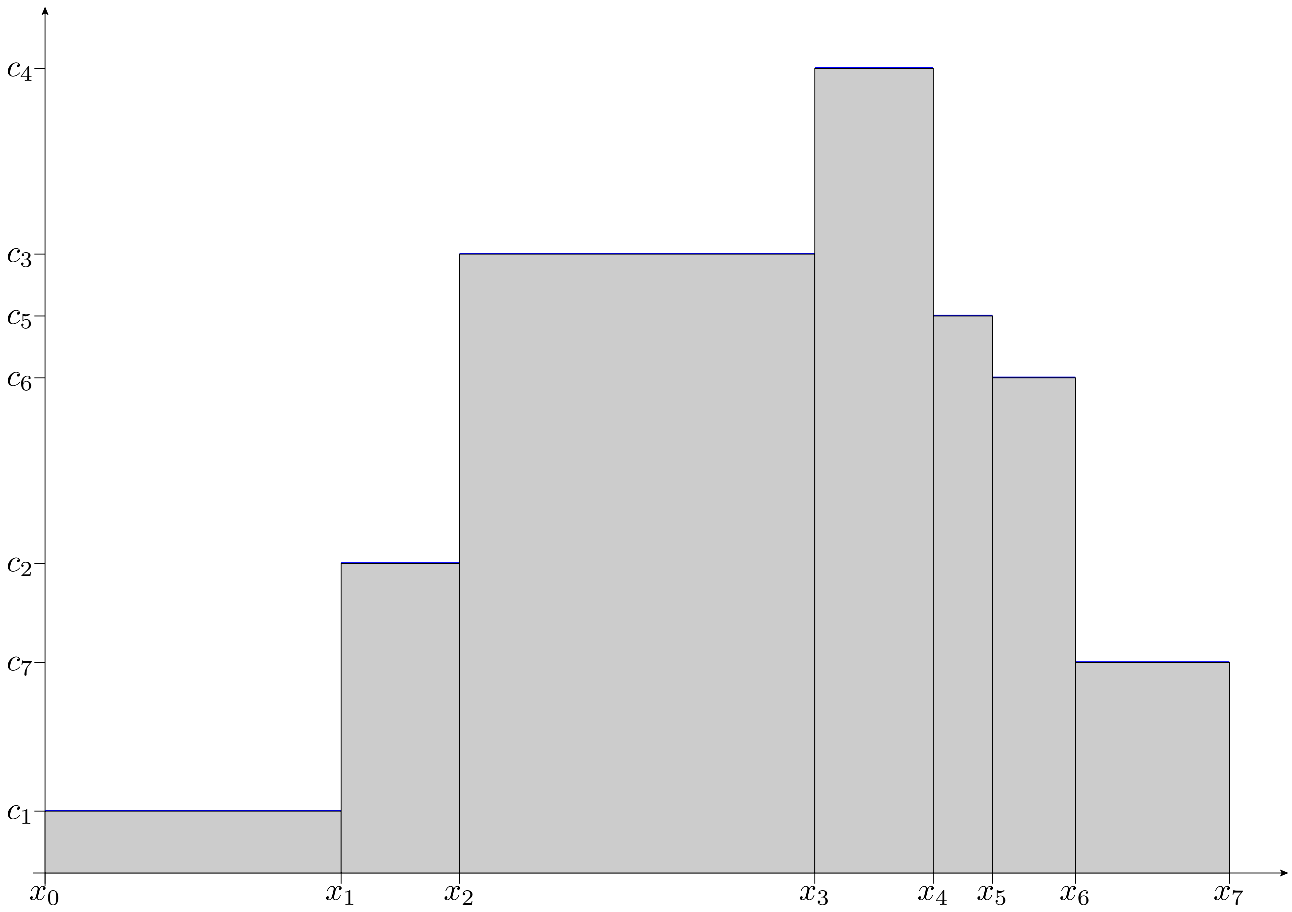


ABBILDUNG 4. Integral einer Treppenfunktion

**7.3. Lemma.** Seien $e, g : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $e \leq g$. Dann gilt

$$\int_a^b e(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

**7.4. Definition.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir definieren dann das untere (Riemann) Integral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\left\{ \int_a^b g(x)\,dx \,:\, g \text{ ist TF, } g \leq f \text{ auf } I \right\}$$

und das obere (Riemann) Integral

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\left\{ \int_a^b g(x)\,dx \,:\, g \text{ ist TF, } g \geq f \text{ auf } I \right\}.$$

**7.5. Bemerkung.** Unter- und Oberintegral sind wohldefiniert und reell. Falls $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in I$ und ein $c \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\geq\; -c(b-a), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\leq\; c(b-a).$$

**7.6. Lemma.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;\leq\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

**7.7. Definition.** Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann) intergrierbar, falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=:\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dann heißt $\int_a^b f(x)\,dx$ Integral von $f$ (über $[a,b]$).

**7.8. Bemerkung.** Treppenfunktionen sind integrierbar.

**7.9. Satz.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(1) $f$ ist integrierbar.

(2) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $e, g : I \to \mathbb{R}$ mit $e \leq f \leq g$ auf $I$, sodass

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b e(x)\,dx \;\leq\; \varepsilon.$$

**7.10. Satz.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $f$ integrierbar.

**7.11. Satz.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ integrierbar.