7.12. Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Seien für $l \in \mathbb{N}$ Intervalle $I_k^{(l)}$, $k = 1, ..., K(l)$ gegeben, sodass

$$I = \bigcup I_k^{(l)} \quad \text{disjunkte Zerlegung von } I.$$

Gelte weiter, dass die *Feinheit* $\delta(l)$ der Zerlegung,

$$\delta(l) := \sup\{|I_k^{(l)}| : k = 1, ..., K(l)\}$$

gegen Null konvergiert mit $l \to \infty$. Für beliebige Punkte $x_k^{(l)} \in I_k^{(l)}$, $k = 1, ..., K(l)$, $l \in \mathbb{N}$, gilt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{K(l)} f(x_k^{(l)}) \mathcal{X}_{I_k^{(l)}}\Big)(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{K(l)} f(x_k^{(l)})|I_k^{(l)}|.$$

7.1. Integrationsregeln und Mittelwertsatz der Integralrechnung

7.13. Satz. Seien $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f_1 \leq f_2$. Dann gilt

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

7.14. Korollar. Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $M := \sup_{x\in I} |f(x)|$ gilt

$$-(b-a)M \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M.$$

7.15. Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Seien $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi \geq 0$. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(x_0) \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Insbesondere existiert ein $x_0 \in [a,b]$, sodass

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0).$$

7.16. Satz (Linearität). Seien $f, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen

$$\alpha f, f_1 + f_2 \,:\, I \to \mathbb{R}$$

integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f)(x)\,dx \;&=\; \alpha \int_a^b f(x)\,dx, \\ \int_a^b (f_1 + f_2)(x)\,dx \;&=\; \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \end{aligned}$$