Die folgenden Aufgabensammlungen soll Ihnen helfen, Ihren Wissensstand zu überprüfen. Die Sammlung ist nicht umfassend und abschließend. Insbesondere ist die Aufstellung nicht so zu verstehen, dass nur die im folgenden angesprochenen Themen wichtig sind und dass nur diese in der Klausur/mündlichen Prüfung abgefragt werden. Klausuraufgaben haben nicht notwendig die hier vorgestellte Form (insbesondere wird es in der Klausur wieder multiple choice Fragen geben).

Wissensfragen

Sie sollen wichtige Begriffe und Aussagen der Vorlesung formulieren und erklären können.

1. Geben Sie die Definition des äußeren Lebesguemaßes an.
2. Erklären Sie den Begriff 'äußere Regularität' des Lebesguemaßes.
3. Geben Sie Beispiele für Familien von Mengen an, die Lebesgue-messbar sind.
4. Unter welchen Operationen bleibt die Messbarkeit von Mengen erhalten?
5. Welche Aussagen gelten für das Lebesguemaß einer Folge von aufsteigenden/absteigenden Mengen?
6. Erklären Sie den Begriff 'innere Regularität' des Lebesguemaßes.
7. Geben Sie zwei Charakterisierungen Lebesgue-messbarer Mengen.
8. Definieren Sie die Begriffe 'allgemeines äußeres Maß' und 'messbare Menge' bezüglich eines allgemeinen äußeren Maßes.
9. Definieren Sie: σ-Algebra.
10. Definieren Sie: Allgemeines Maß, Maßraum.
11. Geben Sie verschiedene Charakterisierungen der Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$ an.
12. Definieren Sie den Begriff 'messbar' für ein reellwertige Funktion.
13. Geben Sie verschiedene Charakterisierungen dafür an, dass eine reellwertige Funktion messbar ist.
14. Unter welchen Operationen bleibt die Messbarkeit von Funktionen erhalten?
15. Erklären Sie die Definition von $\liminf_{k\to\infty} f_k$ für eine Folge von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{R}$.
16. Was ist eine μ-Treppenfunktion?
17. Was ist der Zusammenhang zwischen Messbarkeit einer Funktion und Treppenfunktionen?
18. Geben Sie eine Definition des Lebesgue-Integrals an.
19. Formulieren Sie die Monotonie und Linearität des Lebesgue-Integrals.
20. Was besagt das Majorantenkriterium?
21. Formulieren Sie die wichtigsten Konvergenzsätze.
22. Wie lautet der Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale?
23. Was ist der Raum $L^1(\mu)$?
24. Welche Eigenschaften hat der Raum $L^1(\mu)$?
25. Formulieren Sie die beiden Sätze von Fubini.

26. Formulieren Sie die Transformationsformel.

27. Wie ist die Faltung definiert?

28. Was können Sie über Differenzierbarkeit der Faltung zweier Funktionen aussagen?

29. Wie ist die Fouriertransformation erklärt?

30. Was sind wesentliche Eigenschaften der Fouriertransformation?

31. Wie lautet der Inversionssatz für die Fouriertransformation?

32. Wie sind Gramsche Matrix und Jacobische einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ definiert?

33. Wie lautet die Flächenformel?

34. Was ist eine lokale Parametrisierung?

35. Seien f_1, f_2 lokale Parametrisierungen einer Untermannigfaltigkeit. Was können Sie über einen Wechsel $f_2^{-1} \circ f_1$ der Parametrisierungen aussagen?

36. Sei M Untermannigfaltigkeit. Wie sind das Flächenmaß μ_M und der zugehörige Maßraum erklärt?

37. Wie ist $\int_M u \, d\mu_M$ erklärt?

38. Formulieren Sie die „Zwiebelformel".

39. Wie lautet der Satz zur partiellen Integration in $\mathbb{R}^n$?

40. Definieren Sie: C^1-Rand.

41. Formulieren und erläutern Sie den Satz von Gauß.

42. Wie erhalten Sie aus der lokalen Version der Gaußschen Satzes die globale Version?

43. Welche partiellen Integrationsformeln können Sie aus dem Gaußschen Satz ableiten?

44. Wie lautet der Satz von Stokes in der Ebene?

45. Was ist der orientierte Rand einer orientierten Untermannigfaltigkeit?

46. Wie lautet der Satz von Stokes für Flächen in $\mathbb{R}^3$?

Beweisaufgaben

Sie sollen einfache Beweise selbst ausführen können und Teile oder Beweisideen der wichtigen Sätze erklären können.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge ist.

2. Zeigen Sie die Subadditivität des äußeren Lebesguemaßes.

3. Zeigen Sie mit Hilfe der äußeren Regularität des Lebesguemaßes, dass Lebesgue-Nullmengen Lebesgue-messbar sind.

4. Zeigen Sie, dass die abzählbare Vereinigung Lebesgue-messbarer Mengen wieder Lebesgue-messbar ist.

5. Gelte für eine Familie E_i, $i \in \mathbb{N}$, messbarer Mengen

$$\mathcal{L}^n(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \sum_{i=1}^k \mathcal{L}^n(E_i) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{L}^n(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^n(E_i)$ gilt.

6. Zeigen Sie, dass für $k+m=n, k>1$, die Hyperebene $\mathbb{R}^m \times \{0_k\} \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge ist.

7. Seien $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}^n(E_i).$$

8. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeigen Sie: Durch

$$\mu(B) := \mathcal{L}^n(f^{-1}(B)) \quad \text{für } B \subset \mathbb{R}^m$$

ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^m$ erklärt.

9. Sei μ äußeres Maß auf M. Zeigen Sie, dass μ-Nullmengen μ-messbar sind.

10. Beweisen Sie, dass die Vereinigung zweier messbarer Mengen wieder messbar ist.

11. Zeigen Sie: Die von den offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra stimmt mit der durch die abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ erzeugten σ-Algebra überein.

12. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Zeigen Sie: Dann ist $\{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \text{ ist } \mathcal{L}^n\text{-messbar}\}$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$.

13. Sei $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}, k = 1, 2, \dots$ eine Folge μ-messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ μ-messbar ist.

14. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie: Dann ist auch f_+ messbar.

15. Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ $\mathcal{L}^n$-messbar, $\int f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n < \infty$. Zeigen Sie für alle $s \in (0,\infty)$

$$\mathcal{L}^n\left(\{f \geq s\}\right) \leq \frac{1}{s} \int f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

16. Beweisen Sie das Lemma von Fatou.

17. Beweisen Sie den Lebesgueschen Konvergenzsatz.

18. Beweisen Sie den Satz über parameterabhängige Integrale.

19. Geben Sie eine in $L^1(\mathbb{R})$ konvergent Folge von Funktionen an, für die keine Teilfolge punktweise in $\mathbb{R}$ konvergiert.

20. Leiten Sie die Transformationsformel für Polarkoordinaten her.

21. Sei $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * \varphi$ stetig.

22. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} \,\mathrm{d}\xi.$$

23. Leiten Sie die Flächenformel für einen Graphen her.

24. Zeigen Sie die Invarianz der Flächenformel unter Umparametrisierung.
25. Geben Sie eine Beweisskizze der Zwiebelformel.
26. Beweisen Sie die partielle Integrationsformel in $\mathbb{R}^n$.
27. Beweisen Sie die Greenschen Formeln.
28. Beweisen Sie den Satz von Stokes in der Ebene.

Rechenaufgaben

Sie sollen die in der Vorlesung und Übung vorgestellten Rechentechniken selbständig anwenden können. Im Folgenden finden Sie dazu Beispielaufgaben und allgemein formulierte Aufgaben.

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind:
$$f(t) = \cos(t), \qquad g(t) = \frac{1}{t}\cos(t), \qquad h(t) = \frac{1}{1+t^2}\cos(t^2).$$
2. Untersuchen Sie die folgenden Folgen von Funktionen auf $\mathbb{R}$ auf ihre Konvergenz in $L^1(\mathbb{R})$:
$$f(t) = \frac{1}{t}\sin(kt), \qquad g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(kt), \qquad h(t) = k\chi_{[\frac{-1}{k},\frac{1}{k}]}.$$
3. Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, d\mathcal{L}^1(t)$.
4. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $f \in C^0([0,1])$. Drücken Sie das folgende Integral durch ein Integral über $\mathbb{R}$ aus.
$$\int_D f(x_1+x_2)x_1x_2^2\, d\mathcal{L}^2(x_1,x_2).$$
5. Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, den der Zylinder $B^2(0,\frac{1}{2}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ aus dem Ellipsoid
$$\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + x_3^2 \le 1\right\}$$
ausschneidet.
6. Berechnen Sie für das Rechteck
$$R = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x_1+x_2 < 2,\ 0 < x_1 - x_2 < 2\right\}$$
das Integral $\int_R (1+x_1-x_2)(1+x_1+x_2)\, dx$.
7. Gilt für $f : \mathbb{R}^3 \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) := |x|^{-1}$, dass $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$?
8. Berechnen Sie für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = \chi_{(0,1)}$, $g(x) := \sqrt{|x|}$ die Faltungen $f * g$ und $g * f$. Geben Sie an, wie oft die Funktion $f * g$ differenzierbar ist.
9. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(-\frac{|x|}{a})$, $a > 0$.
10. Berechnen Sie Gramsche Matrix und Jacobische einer explizit gegebenen Funktion.
11. Berechnen Sie die Oberflächen einer konkret gegebenen Fläche, insbesondere von Sphäre, Ellipse und Torus.
12. Wann ist $x \mapsto |x|^\alpha$ in $L^p(B(0,1))$ bzw. $L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1))$?

13. Bestimmen Sie die äußere Normale einer konkret gegebenen Menge.
14. Berechnen Sie die Oberfläche der Sphäre mit Hilfe des Gaußschen Satzes.
15. Stellen Sie in konkreten Beispielen mit Hilfe des Gaußschen Satzes Volumen- als Flächenintegrale dar und umgekehrt.
16. Stellen Sie in konkreten Beispielen mit Hilfe des Stokes'schen Satzes Volumen- als Flächenintegrale dar und umgekehrt.