Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. S. Hausberg

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

1. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie II / WS 2012

Abgabetermin: bis 22. Oktober 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37

Aufgabe 1: (Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten - 4 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator einer Funktion $u \in C^2(U)$

$$\Delta u(x, y) = \partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u$$

in Polarkoordinaten, $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ mit $(r, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$, die Darstellung

$$\Delta u(r, \phi) = \partial^2_{rr} u + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi} u + \frac{1}{r}\partial_r u \tag{1}$$

besitzt.

Aufgabe 2: (Ausbreitungsgeschwindkeit bei Diffusion - 4 Punkte)
Satz: Es sei $U = \mathbb{R}$. Die Abbildung $u(x, t) \in C^2(U)$ erfülle die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u = D\partial^2_{xx} u, \qquad \text{mit } D > 0. \tag{2}$$

Es sei u „klein im Unendlichen", d.h. es gilt für alle Zeiten t

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 \cdot \partial_x u(x, t) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot u(x, t) = 0.$$

Wir definieren für alle Zeiten t ein Ausbreitungsmaß des diffundierenden Stoffs, eine Art Varianz, durch

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x, t)\, dx \text{ mit } C := \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0)\, dx.$$

Es sei $\sigma^2(0)$ beschränkt. Dann gilt:

$$\sigma^2(t) = 2Dt + \sigma^2(0). \tag{3}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Beschränktheit von $\sigma^2(0)$ die zeitliche Konstanz der Gesamtmasse impliziert, d.h.

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\, dx, \text{ für alle } t.$$

(ii) Beweisen Sie die Identität (3). (Tipp: Formen Sie den Ausdruck $\frac{C}{D}\partial_t \sigma^2$ mittels partieller Integration um.)

Aufgabe 3: (Eine Transportgleichung mit linearer Reaktionsrate - 4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ und $t \in [0, T]$. Weiter sei $v(x, t) \equiv v$ eine konstante Geschwindigkeit und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie folgende Transportgleichung

$$\partial_t u + v\partial_x u = \lambda u. \tag{4}$$

Satz:

(i) Der Ausdruck $e^{\lambda t} f(x - vt)$ ist eine Lösung von (4) für jedes λ und f.

(ii) Jede Lösung von (4) ist von der Form

$$u(x, t) = e^{\lambda t} f(x - vt) \tag{5}$$

für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweisen Sie den obigen Satz. (Tipp für (ii): Starten Sie mit $v = 0$ und versuchen Sie dann mit der Transformation $z = x - vt$ zu arbeiten.)

Aufgabe 4: (1-dimensionale Irrfahrt mit Drifttermen - 4 Punkte)
Sei $k \cdot \mathbb{Z},\ k > 0$ ein 1-dimensionales Gitter. Weiter sei $c(x, t)$ die mittlere Anzahl von Partikeln in $x \in k\mathbb{Z}$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Sei $h > 0$ eine feste Zeitschrittweite. Ein Partikel in x befindet sich zum nächsten Zeitschritt an Position

$$\begin{array}{lll} x - k & \text{mit Wahrscheinlichkeit} & p, \\ x + k & \text{mit Wahrscheinlichkeit} & q, \\ x & \text{mit Wahrscheinlichkeit} & 1 - p - q, \end{array}$$

mit $p + q < 1$.

(i) Für eine Konstante $\alpha > 0$ gelte die Abhängigkeit $q = q(k) = p - \alpha k$. Leiten Sie in Analogie zur Vorlesung eine Limesgleichung für $h, k \to 0$, h proportional zu k^2, her.

(ii) Seien nun $p \neq q$ fest. Wie müssen Sie k in Abhängigkeit von h wählen, um eine nichttriviale Evolutionsgleichung im Limes $h \to 0$ zu erhalten?