Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. S. Hausberg

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

1. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: 19.04.2012.

Aufgabe 1: (Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen - 4 Punkte)

(i) Es sei das Lotka-Volterra-Modell durch

$$\begin{aligned} \dot{N} &= N(a - bP) \\ \dot{P} &= P(cN - d) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $a, b, c, d > 0$ gegeben. Dabei sei N die Anzahl der Beutetiere und P die Anzahl der Jägertiere. Zeichnen Sie ein Phasenportrait für den Bereich $[-5, 5]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) Definition: Eine Differentialgleichung der Form $p(x, y(x)) + q(x, y(x))\frac{dy}{dx} = 0$ heißt exakt, falls eine stetig differenzierbare Funktion $F(x, y)$ existiert, sodass für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = p(x,y), \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = q(x,y).$$

Eine solche Funktion F wird Hamilton-Funktion oder Potentialfunktion der obigen Differentialgleichung genannt.

Wir wollen zeigen, dass die Trajektorien im biologisch relevanten 1. Quadranten geschlossene Kurven sind. Zeigen Sie dazu folgende Behauptungen:

- Die Differentialgleichung

  $$\frac{a - bP}{P}\frac{dP}{dN} + \frac{d - cN}{N} = 0$$

  ist eine Umformulierung von (1), ist exakt und hat die Stammfunktion

  $$S_0(N, P) = a \ln|P| - bP - a \ln|P_0| + bP_0 + d \ln|N| - cN - d \ln|N_0| + cN_0$$

  für Anfangswerte N_0, P_0.

- Gegeben sei: Die Niveaumenge

  $$N_{\tilde{c}} := \{(N, P) \in (0, \infty)^2 \ : \ a \ln P - bP + d \ln N - cN = \tilde{c}\}$$

  des sogenannten ersten Integrals $F(N, P) := a \ln P - bP + d \ln N - cN$ entspricht den Trajektorien des Systems (1).

  Zerlegen Sie das erste Integral in die Faktoren $p(N) := d \ln N - cN$ und $q(P) := a \ln P - bP$ und schließen Sie, dass die Trajektorien geschlossene Kurven sein müssen.

Aufgabe 2: (Reaktionskinetik - 4 Punkte)

(i) Eine verallgemeinerte, symbolische Darstellung einer Reaktion mehrerer Stoffe zu mehreren Produkten hat die Form

$$\nu_1 X_1 + \ldots + \nu_k X_k \rightleftharpoons v_{k+1} X_{k+1} + \ldots + \nu_m X_m. \tag{2}$$

Hierbei sind die X_i, $i = 1, \ldots, m$ die Reaktionsteilnehmer und die ν_i beschreiben die Reaktionsgewichtungen (stoichiometrische Koeffizienten). Stellen Sie ein hierzu korrespondierendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der entsprechenden Stoffkonzentrationen auf.

(ii) Berechnen Sie die Gleichgewichtszustände aus System (2).

(iii) Enzyme sind biologische Katalysatoren und wandeln ein Substrat in ein Produkt um, ohne das sie selbst ihre Form verändern. Das Michaelis-Menten-Gesetz beschreibt die Reaktionskinetik zwischen einem Enzym und einem Substrat. Sei dazu S ein Substrat, E eine Enzym, P das Produkt und C der Komplex aus Substrat und Enzym. Die Reaktionsgleichung

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \underset{k_2}{\rightarrow} P + E$$

beschreibt einen entsprechenden 2-Schritt-Prozess. Bearbeiten Sie folgende Arbeitsaufträge:

- Die Annahmen von L. Michaelis und M. Menten lauten:
  1. Annahme: Die Komplexformation ist nach einiger Zeit im Equilibrium, d.h. $\dot{c} = 0$.
  2. Annahme: Die Enzymkonzentration ist im Vergleich zur Substratkonzentration sehr klein, d.h. $s(t_0) \approx s_0$.
  Benutzen Sie diese, um das System weiter zu vereinfachen.
- Leiten Sie die Michaelis-Menten-Gleichung

  $$\dot{p} = \frac{k_2 e_0 s}{K_m + s}$$

  her und bestimmen Sie die Michaelis-Menten-Konstante K_m.