Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. S. Hausberg

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

2. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012

Abgabetermin: 3. Mai 2012

Aufgabe 3: (Matrixexponentialfunktion und stabile Räume - 4 Punkte)
Wir betrachten das System

$$\dot{x} = Ax, \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(i) Berechnen Sie die Matrixexponentialabbildung $\exp(tA)$ zunächst per Definition und dann mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung.

(ii) Bestimmen Sie $\mathcal{E}^u, \mathcal{E}^s$ und $\mathcal{E}^c$.

Aufgabe 4: (Lineare planare Systeme - 4 Punkte)
Es sei ein System $\dot{x} = Ax$ gegeben. Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lassen sich in folgende drei Hauptkategorien unterteilen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ und } \quad A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & -b \\ b & \lambda \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie $\mu > 0$ und in jeder Hauptkategorie jeweils die Fälle $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$. Skizzieren Sie die zugehörigen Phasenportraits.

Aufgabe 5: (Lösungsverhalten für lineare Systeme - 4 Punkte)
Behauptung:
Für jede Lösung $y(t)$ des Systems $\dot{x} = Ax$ mit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildung trifft genau eine der folgenden Alternativen zu:

(i) $\lim_{t\nearrow\infty} y(t) = 0$ und $\lim_{t\searrow-\infty} |y(t)| = \infty$,

(ii) $\lim_{t\nearrow\infty} |y(t)| = \infty$ und $\lim_{t\searrow-\infty} y(t) = 0$,

(iii) Es existieren reelle Zahlen $M, N > 0$, sodass $M < |y(t)| < N$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweisen oder Widerlegen Sie die Behauptung.

Aufgabe 6: (Travelling wave Lösungen - Linearisierung - 4 Punkte)
Es sei eine zu Beispiel 2.13 äquivalente 'travelling wave'-Formulierung durch das System

$$\begin{pmatrix} Z \\ U \\ W \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -cZ + U - W + \gamma k U(1-W) \\ Z \\ -\frac{k}{c} U(1-W) \end{pmatrix} \tag{2}$$

gegeben. Bearbeiten Sie folgende Arbeitsaufträge:

(i) Approximieren Sie (2) in der Nähe des stationären Punktes $(0, 1, 1)$ durch ein lineares System in den Variablen $(Z, 1-U, 1-W)$.

(ii) Bestimmen Sie für alle positiven Eigenwerte die zugehörigen verallgemeinerten Eigenvektoren. Welcher Eigenwert kann das Verhalten einer biologisch sinnvollen Lösung (also $0 \leq U, W \leq 1$) beschreiben?