Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. S. Hausberg

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

3. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012

Abgabetermin: bis 18. Mai 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37

Aufgabe 7: (Umformulierung von $\alpha(x_0)$ und $\omega(x_0)$ - 4 Punkte)
Sei ein System von GDGen $\dot{x} = f(x)$ gegeben, das einen Fluss $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}^n$ erzeugt (vgl. Vorlesung). Zudem seien die α-Menge und die ω-Menge zu einem Wert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\omega(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \liminf_{t\to\infty} |x - \phi_t(x_0)| = 0\},$$
$$\alpha(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \liminf_{t\to-\infty} |x - \phi_t(x_0)| = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\gamma^+(\phi_t(x_0))}, \qquad \alpha(x_0) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\gamma^-(\phi_t(x_0))}$$

gilt, wobei $\gamma^\pm(x_0)$ positiver und negativer Orbit zu x_0 ist.

Aufgabe 8: (Parameterabhängige GDG - 4 Punkte)
Skizzieren Sie das Phasenportrait des Systems

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = (\alpha+1)x + (\alpha-1)y, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

und entscheiden Sie in Abhängigkeit von α, ob die jeweiligen Ruhelagen stabil, asymptotisch stabil oder instabil sind.

Aufgabe 9: (Biologisches Infektionsmodell - 4 Punkte)
Wir betrachten ein biologisch-mathematisches Infektionsmodell zweier Spezies N, N^* die entweder anfällig (engl.: susceptible) für eine Krankheit sind (S bzw. S^*) oder bereits infiziert sind (I bzw. I^*). Die dynamische Entwicklung der Infektionskrankheit verhält sich gemäß dem System

$$\frac{dS}{dt} = -rSI^* + aI, \qquad \frac{dS^*}{dt} = -r^*S^*I + a^*I^*, \tag{1}$$
$$\frac{dI}{dt} = rSI^* - aI, \qquad \frac{dI^*}{dt} = r^*S^*I - a^*I^*, \tag{2}$$

mit den Anfangsbedingungen $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $S^*(0) = S_0^*$ und $I^*(0) = I_0^*$ und den positiven Konstanten r, a, r^*, a^*. Arbeitsaufträge:

(i) Interpretieren Sie die Gleichungen. Welche Modellannahmen stehen hinter den Gleichungen?

(ii) Reduzieren Sie System (1)-(2) auf ein System in den Variablen I und I^*.

(iii) Berechnen Sie die Ruhelagen und finden Sie so eine Bedingung für eine echt positive Ruhelage (I_s, I_s^*).

(iv) Linearisieren Sie das in (i) gefundene System sowohl um den Punkt $(0,0)$, als auch um (I_s, I_s^*). Welche biologischen Schlüsse ergeben sich nun für die Population?

Aufgabe 10: (Globale exponentielle Stabilität - 4 Punkte)
Seien $\beta > 0$, $M > 0$ und $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben, sodass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung x von $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ auf $\mathbb{R}_0^+$ existiert und so dass

$$|x(t)| \le Me^{-\beta t}|x(0)|, \qquad \forall t \ge 0 \tag{3}$$

gilt.
Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $\alpha > 0$ existieren, so dass

$$V \ge 0, \quad V(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$
$$\dot{V}(z) \le -\alpha V(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

gilt, wobei $\dot{V}(z) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(x(t))$, $x(t)$ Lösung von $\dot{x}(t) = f(x)$, $x(0) = z$ ist.
(Hinweis: Setzen Sie $V(z) := \int_0^\infty |x(t)|^2 dt$.)