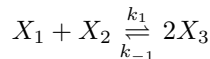


**4. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012**

**Abgabetermin: bis 31. Mai 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37**

**Aufgabe 11: (Stark reversible Reaktionen und Gradientenflüsse - 4 Punkte)**

Gegeben sei ein chemisches Reaktionssystem mit den fiktiven Stoffen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  die nach der Gesetzmäßigkeit



reagieren. Dabei sind  $k_{-1}, k_1 \in \mathbb{R}$  und die chemischen Stoffkonzentrationen seien durch  $n_1, n_2$  und  $n_3$  gegeben. Es herrscht Masseerhaltung.

(i) Zeigen Sie, dass das zugehörige System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen in der Form

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}' = (k_1 n_1 n_2 + k_{-1} n_3^2)(\beta - \alpha) =: R(n) \quad (1)$$

mit dem Konzentrationsvektor  $n := (n_1, n_2, n_3)$  geschrieben werden kann und bestimmen Sie die Vektoren  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^3$ .

(ii) Sei System (1) *stark reversibel*, d.h. es gilt  $k_1 = k_{-1} =: k$ . Wir definieren die *freie Energie* als  $F(n) := \sum_{i=1}^3 n_i (\log n_i - 1)$ . Berechnen Sie das *chemische Potential*  $DF(n) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T =: \mu$  als Ableitung der freien Energie. Bestimmen Sie  $\frac{d}{dt} F(n(t)) =: V(t)$  und zeigen Sie, dass die Ableitung dieser Lyapunovfunktion stets ein negatives Vorzeichen hat.

(iii) Zeigen Sie, dass das durch

$$\psi(n, \mu) := \frac{k}{2} l(n_1 n_2, n_3^2) ((\alpha - \beta) \cdot \mu)^2 \quad (2)$$

mit

$$l(x, y) := \begin{cases} \frac{x-y}{\log x - \log y}, & \text{für } x \neq y \\ y, & \text{für } x = y \end{cases}$$

gegebene Funktional die spezielle Gradientenflussidentität

$$R(n) \equiv D_\mu \psi(n, -DF(n))$$

erfüllt.

**Aufgabe 12: (Bestimmung einer Lyapunovfunktion - 4 Punkte)**

Es sei folgendes dynamisches System im Raum  $\mathbb{R}^3$  gegeben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y(z - 1), \\ \dot{y} &= -x(z - 1), \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Lyapunovfunktion der Form

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

mit  $a, b, c \geq 0$  für die Ruhelage  $(0, 0, 0)$  und entscheiden Sie ob Stabilität oder asymptotische Stabilität vorliegt.

**Aufgabe 13: (Neuronale Netzwerke - 4 Punkte)**

Die Anregung gekoppelter Nervenzellen (Neuronen) sei durch folgendes System beschrieben

$$\dot{u}_i = -u_i + \sum_{j=1}^N T_{ij} g(u_j) + I_i, \quad (3)$$

wobei  $i = 1, \dots, N$ , mit  $N$  der Anzahl der Neuronen,  $(T_{ij})$  eine symmetrische Matrix und  $g$  eine differenzierbare, monoton wachsende Funktion mit  $g(0) = 0$  und  $I_i \in \mathbb{R}_+$  gilt.

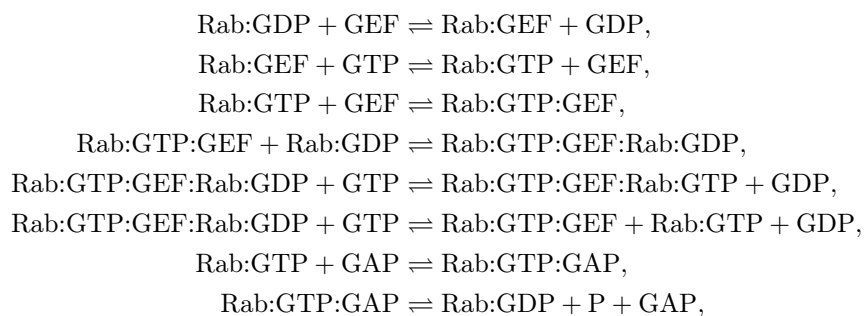
- (i) Interpretieren Sie die Terme der rechten Seite in System (3) mit Hinblick auf die lokale und globale Anregung einer Nervenzelle  $u_i$ .
- (ii) Seien neue Koordinaten  $w_i = g(u_i)$  gegeben und setze  $G(w_i) := \int_0^{w_i} g^{-1}(z) dz$ . Zeigen Sie, dass dann

$$V(w_1, \dots, w_N) := -\frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} w_i w_j + \sum_i G(w_i) - \sum_i w_i I_i$$

eine Lyapunov-Funktion ist.

**Aufgabe 14: (Rab-Protein Zyklus mit positivem feedback - 4 Punkte)**

Wir betrachten einen Rab-Protein Zyklus mit positivem feedback. Folgende Reaktionen finden statt:



hierbei bezeichne Rab eine Proteingruppe, jeweils in Verbindung mit Guanindiphosphat (GDP) im inaktiven oder Guanintriphosphat (GTP) im aktiven Zustand. Durch den Guaninaustauschfaktor (GEF) bzw. das GTPase-aktivierende Protein (GAP) werden die Zustände gewechselt. Durch GAP wird insbesondere ein Phosphatmolekül (P) abgespalten. Zudem ist ein positiver feedback Mechanismus in diesen Kreislauf eingebaut, der die Rab:GTP Produktion steigert. Ihre Arbeitsaufträge lauten:

- (i) Stellen Sie die obigen Reaktionsgleichungen in einem übersichtlichen, gerichteten Graphen mit geeigneten Bezeichnungen dar und bestimmen Sie die Anzahl  $l$  der Zusammenhangskomponenten.
- (ii) Bestimmen Sie den stöchiometrischen Raum  $S$  und dessen Dimension  $s$ .
- (iii) Berechnen Sie die Defizienz  $\delta$ .