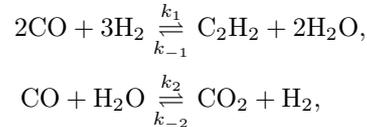


5. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012

Abgabetermin: bis 14. Juni 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37

Aufgabe 15: (Darstellung von Reaktionsnetzwerken - 4 Punkte)

Wir betrachten das chemische Reaktionsnetzwerk



und wechseln zu folgender Notation



- (i) Bestimmen Sie die Defizienz δ des Systems (1) nach Definition 3.6.
- (ii) Bestimmen Sie den Änderungsratenvektor \dot{n} der beteiligten chemischen Stoffe aus System (1) mit Hilfe der kinetischen Matrix A und der stöchiometrischen Matrix C .
- (iii) Bestimmen Sie mittels Folgerung 3.16 die Defizienz δ von System (1).

Aufgabe 16: (Das LaSalle'sche Invarianzprinzip - 4 Punkte)

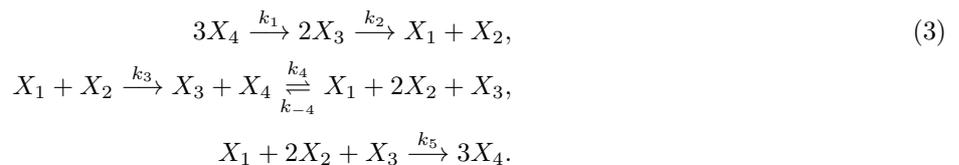
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3, \\ \dot{y} &= x^5. \end{aligned} \tag{2}$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Funktion $V(x, y) = x^6 + \alpha y^2$ für geeignetes $\alpha > 0$ eine Lyapunovfunktion zu System (2) in der Ruhelage $(0, 0)$ ist und bestimmen Sie α .
- (ii) Entscheiden Sie mittels LaSalle'schem Invarianzprinzip 2.29, ob der Punkt $(0, 0)$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 17: (Ein „complex balanced“ System - 4 Punkte)

Gegeben sei ein System elementarer chemischer Reaktionen



- (i) Skizzieren Sie den zu System (3) gehörenden Reaktionsgraphen.
- (ii) Berechnen Sie die Defizienz δ von (3).
- (iii) Berechnen Sie die stationären Punkte von (3) die *complex balanced* genannt werden.

Aufgabe 18: (Die FitzHugh-Nagumo Gleichungen und invariante Regionen - 4 Punkte)

Wir betrachten einen degenerierten Spezialfall der FitzHugh-Nagumo Gleichungen

$$v_t = -v(v - \beta)(v - 1) - u, \quad u_t = \sigma v - \gamma u, \tag{4}$$

mit $\sigma, \gamma > 0$ und $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

- (i) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der rechten Seiten von (4) in der (v, u) -Ebene.
- (ii) Zeigen Sie, dass das Gebiet

$$\Sigma := \{(v, u) : -1 \leq v \leq 2, -1 \leq u \leq 2\frac{\sigma}{\gamma}\}$$

ein invariantes Gebiet ist, d.h. falls ein Startwert x_0 in Σ liegt, so bleiben Lösungskurven für alle Zeiten t ebenfalls in Σ . Welche Bedingungen müssen dabei für β, σ und γ gelten?