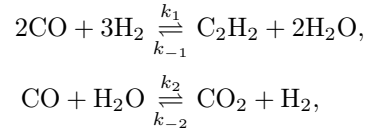


**5. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012**

**Abgabetermin: bis 14. Juni 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37**

**Aufgabe 15: (Darstellung von Reaktionsnetzwerken - 4 Punkte)**

Wir betrachten das chemische Reaktionsnetzwerk



und wechseln zu folgender Notation



- (i) Bestimmen Sie die Defizienz  $\delta$  des Systems (1) nach Definition 3.6.
- (ii) Bestimmen Sie den Änderungsratenvektor  $\dot{n}$  der beteiligten chemischen Stoffe aus System (1) mit Hilfe der kinetischen Matrix  $A$  und der stöchiometrischen Matrix  $C$ .
- (iii) Bestimmen Sie mittels Folgerung 3.16 die Defizienz  $\delta$  von System (1).

**Aufgabe 16: (Das LaSalle'sche Invarianzprinzip - 4 Punkte)**

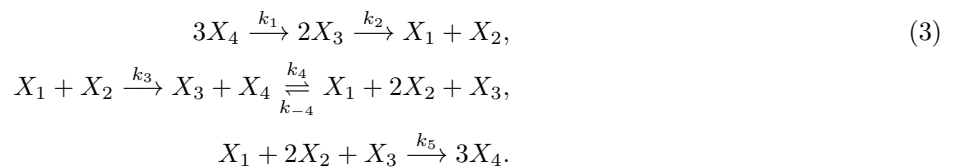
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3, \\ \dot{y} &= x^5. \end{aligned} \tag{2}$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Funktion  $V(x, y) = x^6 + \alpha y^2$  für geeignetes  $\alpha > 0$  eine Lyapunovfunktion zu System (2) in der Ruhelage  $(0, 0)$  ist und bestimmen Sie  $\alpha$ .
- (ii) Entscheiden Sie mittels LaSalle'schem Invarianzprinzip 2.29, ob der Punkt  $(0, 0)$  asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 17: (Ein „complex balanced“ System - 4 Punkte)**

Gegeben sei ein System elementarer chemischer Reaktionen



- (i) Skizzieren Sie den zu System (3) gehörenden Reaktionsgraphen.
- (ii) Berechnen Sie die Defizienz  $\delta$  von (3).
- (iii) Berechnen Sie die stationären Punkte von (3) die *complex balanced* genannt werden.

**Aufgabe 18: (Die FitzHugh-Nagumo Gleichungen und invariante Regionen - 4 Punkte)**

Wir betrachten einen degenerierten Spezialfall der FitzHugh-Nagumo Gleichungen

$$v_t = -v(v - \beta)(v - 1) - u, \quad u_t = \sigma v - \gamma u, \tag{4}$$

mit  $\sigma, \gamma > 0$  und  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ .

- (i) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der rechten Seiten von (4) in der  $(v, u)$ -Ebene.
- (ii) Zeigen Sie, dass das Gebiet

$$\Sigma := \{(v, u) : -1 \leq v \leq 2, -1 \leq u \leq 2\frac{\sigma}{\gamma}\}$$

ein invariantes Gebiet ist, d.h. falls ein Startwert  $x_0$  in  $\Sigma$  liegt, so bleiben Lösungskurven für alle Zeiten  $t$  ebenfalls in  $\Sigma$ . Welche Bedingungen müssen dabei für  $\beta, \sigma$  und  $\gamma$  gelten?