Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. S. Hausberg

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

5. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012

Abgabetermin: bis 14. Juni 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37

Aufgabe 15: (Darstellung von Reaktionsnetzwerken - 4 Punkte)
Wir betrachten das chemische Reaktionsnetzwerk

$$2\mathrm{CO} + 3\mathrm{H}_2 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{C}_2\mathrm{H}_2 + 2\mathrm{H}_2\mathrm{O},$$
$$\mathrm{CO} + \mathrm{H}_2\mathrm{O} \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} \mathrm{CO}_2 + \mathrm{H}_2,$$

und wechseln zu folgender Notation

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X_3 + 2X_4, \\ X_1 + X_4 &\underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} X_2 + X_5. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie die Defizienz δ des Systems (1) nach Definition 3.6.

(ii) Bestimmen Sie den Änderungsratenvektor $\dot{n}$ der beteiligten chemischen Stoffe aus System (1) mit Hilfe der kinetischen Matrix A und der stöchiometrischen Matrix C.

(iii) Bestimmen Sie mittels Folgerung 3.16 die Defizienz δ von System (1).

Aufgabe 16: (Das LaSalle'sche Invarianzprinzip - 4 Punkte)
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3, \\ \dot{y} &= x^5. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $V(x, y) = x^6 + \alpha y^2$ für geeignetes $\alpha > 0$ eine Lyapunovfunktion zu System (2) in der Ruhelage $(0, 0)$ ist und bestimmen Sie α.

(ii) Entscheiden Sie mittels LaSalle'schem Invarianzprinzip 2.29, ob der Punkt $(0, 0)$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 17: (Ein „complex balanced“ System - 4 Punkte)
Gegeben sei ein System elementarer chemischer Reaktionen

$$\begin{aligned} 3X_4 \xrightarrow{k_1} 2X_3 &\xrightarrow{k_2} X_1 + X_2, \\ X_1 + X_2 \xrightarrow{k_3} X_3 + X_4 &\underset{k_{-4}}{\overset{k_4}{\rightleftharpoons}} X_1 + 2X_2 + X_3, \\ X_1 + 2X_2 + X_3 &\xrightarrow{k_5} 3X_4. \end{aligned} \tag{3}$$

(i) Skizzieren Sie den zu System (3) gehörenden Reaktionsgraphen.

(ii) Berechnen Sie die Defizienz δ von (3).

(iii) Berechnen Sie die stationären Punkte von (3) die *complex balanced* genannt werden.

Aufgabe 18: (Die FitzHugh-Nagumo Gleichungen und invariante Regionen - 4 Punkte)
Wir betrachten einen degenerierten Spezialfall der FitzHugh-Nagumo Gleichungen

$$v_t = -v(v - \beta)(v - 1) - u, \qquad u_t = \sigma v - \gamma u, \tag{4}$$

mit $\sigma, \gamma > 0$ und $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

(i) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der rechten Seiten von (4) in der (v, u)-Ebene.

(ii) Zeigen Sie, dass das Gebiet

$$\Sigma := \{(v, u) : \; -1 \le v \le 2, \; -1 \le u \le 2\frac{\sigma}{\gamma}\}$$

ein invariantes Gebiet ist, d.h. falls ein Startwert x_0 in Σ liegt, so bleiben Lösungskurven für alle Zeiten t ebenfalls in Σ. Welche Bedingungen müssen dabei für β, σ und γ gelten?