Prof. Dr. M. Röger
Dipl.-Math. S. Hausberg

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

7. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Biologie / SS 2012

Abgabetermin: bis 12. Juli 2012 - 12 Uhr, Abgabeort: Briefkasten Nr. 37

Aufgabe 23: (Ein detailed-balanced System - 4 Punkte)
Wir betrachten ein an Beispiel 3.7 angelehntes Reaktionsnetzwerk

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} & X_3 \\ k_3 \upharpoonleft\!\downharpoonright k_{-3} & & \\ X_2 & \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} & X_3 \end{array} \qquad\qquad X_1 + X_2 \underset{k_{-4}}{\overset{k_4}{\rightleftharpoons}} 2X_4$$

Ihre Arbeitsaufträge lauten:

(i) Nehmen Sie an, dass der Vektor $n^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5})^T \in (\mathbb{R}^+)^4$ und die Reaktionsraten $k_1 = 10,\ k_2 = 2,\ k_3 = 5$ und $k_4 = 8$ gegeben sind. Berechnen Sie die Reaktionsraten k_{-1}, k_{-2}, k_{-3} und k_{-4}, sodass das gegebene System in n^* detailed balanced ist.

(ii) Zeigen Sie, dass n^* ein stationärer Punkt des zugehörigen Reaktionsnetzwerks $\dot{n} = CAn^C$ ist.

Aufgabe 24: (Stetige Abhängigkeit der stationären Punkte von den Anfangsdaten - 4 Punkte)
Sei $\mathcal{R}$ ein System elementarer Reaktionen, das die Voraussetzungen aus Satz 3.21 erfüllt. Bezeichne S den zugehörigen stöchiometrischen Raum. Zu einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Kurve

$$n_0 : I \longrightarrow (\mathbb{R}_0^+)^m$$

von „Anfangsdaten“ gegeben.
Zeigen Sie, dass eine stetig differenzierbare Abbildung

$$p : I \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^m$$

existiert, die $t \in I$ den eindeutig bestimmten stationären Punkt der Reaktionskinetik in $n_0(t) + S$ zuordnet.

Aufgabe 25: (Flüsse auf parameterabhängigen linearen Systemen - 4 Punkte)
Betrachten Sie das lineare System

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a & b & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie Klassen von Parametern

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^3,$$

sodass innerhalb der jeweiligen Klassen die von (1) erzeugten Flüsse topologisch konjugiert sind.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\forall (a, b, c)^T \in (\mathbb{R}^+)^3$ ein Eigenwert $\lambda_1 > 0$ existiert. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ_1 die weiteren Eigenwerte und benutzen Sie Satz 4.4. Argumentieren Sie dann ähnlich wie in Beispiel 4.5.

Aufgabe 26: (Hartman-Grobman Theorem - topologische Konjugation - 4 Punkte)
Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass A und B nicht ähnlich sind. (A und B heißen *ähnlich*, falls eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit vollem Rang existiert, sodass $HA = BH$ gilt.)

(ii) Zeigen Sie, dass die jeweiligen Flüsse $\varphi_t(x) = e^{tA}x$ und $\psi_t(y) = e^{tB}y$ topologisch konjugiert sind und berechnen Sie einen konkreten Homeomorphismus h, sodass

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)) \text{ gilt.}$$