Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. M. Röger Agnes Lamacz

1) Hausdorff-Maß einer Geraden.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es sei weiterhin $\gamma(t) := a + t(b-a)$ für $t \in [0,1]$ die Verbindungsgerade zwischen a und b.
Man bestimme das 1-dimensionale Hausdorff-Maß der Geraden, $\mathcal{H}^1(\gamma([0,1]))$.

2) Äquivalenz des n-dimensionalen Hausdorff-Maßes und des Lebesgue-Maßes.

Man zeige: Es gibt Konstanten $C_n, c_n > 0$, die ausschließlich von der Raumdimension n abhängen, so daß für jede Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$c_n \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{H}^n(E) \leq C_n \mathcal{L}^n(E).$$

Dabei bezeichne $\mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß und $\mathcal{H}^n$ das n-dimensionale Hausdorff-Maß.

3) Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge.

Die Cantor-Menge ist durch die folgende Rekursion gegeben. Man definiere $C_0 := [0,1]$, entferne das mittlere offene Drittel, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, und setze $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Entfernt man aus jedem Teilintervall von C_1 wiederum das mittlere offene Drittel, so gelangt man zu $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Auf jedes Teilntervall wende man die gleiche Prozedur an. So erhält man rekursiv eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Teilmengen von $[0,1]$. Wir definieren die Cantor-Menge C als den Durchschnitt der C_n,

$$C := \bigcap_{n \in N_0} C_n \ .$$

Es sei $s := \mathcal{H}\text{-}dim(C)$ die Haussdorff-Dimension von C.

1. Man bestimme s mit Hilfe eines Skalierungsarguments. Dabei dürfen Sie annehmen, daß
$$0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty \qquad (*).$$
2. Man zeige, daß $\mathcal{H}\text{-}dim(C) \leq \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ gilt, ohne die Annahme $(*)$ zu verwenden.

4) Steiner-Symmetrisierung.

Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$. Wir setzen $E_1 := E^s_{e_1}$, $E_1 := (E_1)^s_{e_2}, ..., E^* := (E_{n-1})^s_{e_n}$, wobei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $(E_i)^s_{e_j}$ die Steiner-Symmetrisierung von E_i bezüglich e_j bezeichne.
Man zeige: E^* ist symmetrisch bezüglich aller Koordinatenebenen T_{e_i}.

Abgabe am 17.11.10 in der Vorlesung.