Blatt 3 17.11.10

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. M. Röger Agnes Lamacz

1) Zweidimensionale isodiametrische Ungleichung.

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, konvexe Menge mit glattem Rand. Es gelte O.B.d.A. $A \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ und $(0,0) \in \partial A$.
Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}^2(A) \leq \pi \left(\frac{diam(A)}{2}\right)^2$ gilt.

Anleitung:

1. Man parametrisiere ∂A mittels Polarkoordinaten,
   $\phi(\theta) := (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$.
2. Man zeige, daß
$$\mathcal{L}^2(A) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2(\theta) + r^2(\theta + \frac{\pi}{2})\, d\theta.$$
3. Man folgere $\mathcal{L}^2(A) \leq \pi \left(\frac{diam(A)}{2}\right)^2$.

2) Lipschitz-stetige Fortsetzung.

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und X ein Banachraum. Weiterhin sei $f : D \to X$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $Lip(f) = 1$, d.h. $\forall\, x, y \in D$ gilt

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq |x - y| \qquad (*).$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Fortsetzung $F : \mathbb{R} \to X$, so daß $F|_D = f$ und F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $Lip(F) = 1$ ist.

Anleitung:

1. Man zeige, daß eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf $\bar{D}$ existiert mit $(*)$ für alle $x, y \in \bar{D}$.
2. Zu $x \in \mathbb{R}$ definiere man $x^+ := \inf\{y \in D,\ y \geq x\}$ und $x^- := \sup\{y \in D,\ y \leq x\}$. Zeigen Sie, daß es zu $\alpha := \inf D < x < \sup D =: \beta$ genau ein $t = t(x)$ gibt, so daß $x = t(x)x^+ + (1 - t(x))x^-$.

3. Man setze dann

$$F(x) := \begin{cases} f(\alpha) & \text{falls } \ x \leq \alpha \\ tf(x^+) + (1-t)f(x^-) & \text{falls } \ \alpha < x < \beta \\ f(\beta) & \text{falls } \ x \geq \beta \end{cases}$$

und zeige, daß F die geforderten Eigenschaften besitzt.

3) Transformationsformel.

Es sei $\gamma : [0, L) \to \mathbb{R}^2$ eine glatte, einfache, geschlossene Kurve, parametrisiert nach der Bogenlänge und $\Gamma := \gamma([0, L))$. Zu $\varepsilon > 0$ bestimme man das Volumen $\mathcal{L}^2(Z_\varepsilon)$ von

$$Z_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, \Gamma) < \varepsilon \right\}.$$

Verwenden Sie hierbei $\dot{\nu}(s) = k(s)\dot{\gamma}(s)$, wobei ν den äusseren Normalenvektor des von γ umrandeten Gebiets bezeichne und $k(s)$ die skalare Krümmung von Γ in $\gamma(s)$. Zeigen Sie, daß für $\varepsilon > 0$ klein genug $\mathcal{H}^2(Z_\varepsilon) = 2\varepsilon L(\gamma)$ gilt.

4) Oberflächenmaß und orthogonale Projektionen.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte, konvexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Weiterhin seien $\theta \in S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ und $M_\theta := P_\theta(M)$, wobei P_θ die orthogonale Projektion auf $\{\theta\}^\perp$ bezeichne.
Zeigen Sie:

1. Es gilt

$$\mathcal{H}^2(M) = \frac{1}{\pi} \int_{S^2} \mathcal{H}^2(M_\theta) \; d\mathcal{H}^2(\theta) = 4 \left(\frac{1}{\mathcal{H}^2(S^2)} \int_{S^2} \mathcal{H}^2(M_\theta) \; d\mathcal{H}^2(\theta) \right).$$

2. Ist $M \subset \overline{B(0,1)}$, so gilt $\mathcal{H}^2(M) \leq \mathcal{H}^2(S^2)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $M = S^2$.

Abgabe am 01.12.10 in der Vorlesung.