Blatt 4 01.12.10

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. M. Röger Agnes Lamacz

1) Skalierung des Perimeters.

Seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Isometrie, $\lambda > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zu einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Perimeter definieren wir

$$E_{T,\lambda,x_0} := \{x_0 + \lambda T y \,|\, y \in E\}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$P(E_{T,\lambda,x_0}) = \lambda^{n-1} P(E)$$

gilt, wobei $P(A)$ den Perimeter einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne.

2) Konvergenz von BV-Funktionen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, f_i \in BV(U)$, $i \in \mathbb{N}$, gegeben mit

$$\begin{aligned} f_i &\to f \quad \text{in } L^1(U), \\ |\nabla f_i|(U) &\to |\nabla f|(U). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass dann für $V \subset U$ offen folgt, dass

$$\limsup_{i\to\infty} |\nabla f_i|(\overline{V}) \leq |\nabla f|(\overline{V}).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

gilt.

3) Multiplikation von $BV \cap L^\infty$-Funktionen.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß $BV(U) \cap L^\infty(U)$ eine Algebra ist, d.h.
$f, g \in BV(U) \cap L^\infty(U) \Rightarrow f \cdot g \in BV(U) \cap L^\infty(U)$.

Hinweis: Verwenden Sie geeignete Approximationen von f, g.

4) Der Perimeter und das $\mathcal{H}^{n-1}$-Maß des Randes.

Es sei $B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Es sei weiterhin $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dicht in $B(0,1)$. Zeigen Sie:

1. Es können Radien $r_i > 0$ gewählt werden, so daß $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(B(x_i,r_i)) < \mathcal{L}^n(\overline{B(0,1)})$ und $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x_i,r_i)) < \infty$.
2. Mit $E := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i,r_i)$ gilt $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = \infty$.

   Hinweis: Zeigen Sie, daß $\overline{B(0,1)} \setminus E \subset \partial E$ gilt.
3. Die Menge E hat endlichen Perimeter, $P(E) < \infty$.

   Hinweis: Man betrachte $E_k := \bigcup_{i=1}^k B(x_i,r_i)$ und zeige, daß $\chi_{E_k} \to \chi_E$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Abgabe am 15.12.10 in der Vorlesung.