Blatt 5 15.12.10

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. M. Röger Agnes Lamacz

1) Koflächenformel in BV.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Zeigen Sie, daß für alle $f \in BV(U)$ mit $f \geq 0$

$$|\nabla f|(U) \leq \int_0^\infty P_U(E_t)\, dt$$

gilt, wobei $E_t := \{x \in U \mid f(x) > t\}$.
Anleitung:

1. Zeigen Sie, daß $f(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\, dt$ für alle $x \in U$.
2. Schätzen Sie für $\varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $|\varphi| \leq 1$ den Ausdruck $\int_U f(x)\, \nabla \cdot \varphi\,(x)\, dx$ ab.

2) Folgerung aus der isoperimetrischen Ungleichung.

Es sei $n > 1$. Weiterhin sei $\gamma(n) > 0$ so, daß für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Perimeter und endlichem Lebesgue-Maß gilt:

$$(\mathcal{L}^n(E))^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma(n) P(E).$$

Zeigen Sie: Dann gilt auch für jedes $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma(n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx.$$

Anleitung:

1. Setzen Sie o.B.d.A. voraus, daß $u \geq 0$ gilt.
2. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \geq \frac{1}{\gamma(n)} \int_0^\infty |\{u > t\}|^{\frac{n-1}{n}}\, dt,$$

   wobei $|\{u > t\}|$ das Lebesgue-Maß von $\{x \mid u(x) > t\}$ bezeichne.

3. Man definiere $g(t) := \| \min\{u(\cdot), t\}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}$ und zeige, daß für $0 \le s < t$

$$0 \le g(t) - g(s) \le \| \min\{u, t\} - \min\{u, s\}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le |t - s| \, |\{u > s\}|^{\frac{n-1}{n}}$$

   gilt.
4. Zeigen Sie, daß $g(t)$ für fast alle $t > 0$ differenzierbar ist und betrachten Sie $\int_0^\infty g'(t)\, dt$.

3) Die n-dimensionale Dichte.

Wir definieren für $x \in \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ die n-dimensionale Dichte von E in x durch

$$\theta^n(x) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}.$$

Zeigen Sie, daß für Mengen E mit endlichem Perimeter und $x \in \partial^* E$ gilt: $\theta^n(x) = \frac{1}{2}$.

4) Konvergenz von BV-Funktionen.

Es seien $u \in BV(\mathbb{R}^n), u_k \in BV(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und es gelte

$$u_k \to u \;\text{ in }\; L^1(\mathbb{R}^n) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k| \; dx \to |\nabla u|(\mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, daß dann auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f |\nabla u_k| \, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d|\nabla u|(x)$$

für alle $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Anleitung: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $f \ge 0$:

1. Man zeige, daß gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d|\nabla u|(x) \le \liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f |\nabla u_k| \, dx.$$

2. Für die umgekehrte Ungleichung schreibe man $f = M - (M - f)$, wobei $M := \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Abgabe am 12.01.11 in der Vorlesung.