Blatt 6 13.01.11

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. M. Röger Agnes Lamacz

1) Zu Lemma 5.1.

Es sei $E \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $E := \{(z,s) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < z < 1 \text{ und } 0 < s < z\}$. Für $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ berechnen und vergleichen Sie die folgenden Ausdrücke:

1. $\int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\, d[l'](z)$ mit $l(z) = \mathcal{L}^1(E_z)$
2. $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(z)\, d[\partial_1 \chi_E](z,s)$
3. $\int_{\partial^* E} \varphi(z)\nu_1((z,s))\, d\mathcal{H}^1((z,s))$

2) Perimeter von Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Es sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Mege mit endlichem Perimeter, $P(E) < \infty$, und endlichem Lebesguemaß , $|E| < \infty$. Zeigen Sie:

1. Für $f(s) := \int_{-\infty}^{s} 1\, d[\chi_E'](\sigma)$ gilt $f \in BV(\mathbb{R})$ und $d[f'] = d[\chi_E']$. Außerdem gilt $f = \chi_E$ fast überall in $\mathbb{R}$.
2. Der Perimeter von E genügt der Ungleichung $P(E) \geq 2$.

3) Steiner-Symmetrisierung konvexer Mengen.

Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit endlichem Perimeter und endlichem Lebesgue-Maß , $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Zeigen Sie, daß die Steiner-Symmetrisierung E_ν^s von E bezüglich einer Richtung $\nu \in S^{n-1}$ wieder eine konvexe Menge ist.

4) Steiner-Symmetrisierung von polygonalen Flächen.

Es sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein regelmäßiges 65537-Eck.

Info: Das Besondere am 65537-Eck ist die Tatsache, dass es unter Beschränkung auf die Hilfsmittel Zirkel und Lineal (die Euklidischen Werkzeuge) theoretisch konstruiert werden kann. In der Praxis ist die Konstruktion jedoch unmöglich durchführbar. Die Zahl 65537 ist die größte bekannte Fermat'sche Primzahl.

Wie viele Symmetrisierungsschritte sind nötig, um Q mit Hilfe der Steiner-Symmetrisierung in eine Kugel zu überführen?
Überlegen Sie, wie sich Mengen, deren Rand durch einen Polygonzug gegeben ist, unter der Steiner-Symmetrisierung verhalten.

Abgabe am 26.01.11 in der Vorlesung.