TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 1
Abgabe: 21. Oktober 2009

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Trennung der Variablen.* Manchmal lässt sich die Lösung der Laplacegleichung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen. Betrachten Sie die folgenden Beispiele.

(i) *Laplacegleichung auf einem Rechteck in* $\mathbb{R}^2$. Sei $L > 0$ und $R = (-L, L) \times (-1, 1)$. Finden Sie alle Lösungen der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ in R, die von der Form $u(x, y) = v(x)w(y)$ sind und $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in (-L, L) \times \{-1, 1\}$ erfüllen.

(ii) *Polarkoordinaten.* Betrachte die Transformation

$$T : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad T \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

von Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ auf euklidische Koordinaten. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ sei $v : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(r, \varphi) = u(T(r, \varphi))$. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\Delta u(T(r, \varphi)) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big) v(r, \varphi).$$

Finden Sie weiterhin eine Lösung der Form $v(r, \varphi) = w(r)z(\varphi)$ von $\Delta u = 0$ in der Einheitskreisscheibe mit den Randbedingungen $u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos(k\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Hinweis:</u> Leiten Sie in (ii) eine gewöhnliche Differentialgleichung für w her und benützen Sie etwa die Variablentransformation $r = e^s$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Rotationsinvarianz der Laplace-Gleichung.* Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gelte $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$. Sei außerdem $A \in O(n)$ eine orthogonale $n \times n$ Matrix und

$$v(x) := u(Ax), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass dann auch v die Laplace-Gleichung $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n$ erfüllt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega := (0, 1)^2, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{1}$$

für die gesuchte Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und Randdaten $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ im Allgemeinen nicht wohlgestellt ist.

<u>Hinweis:</u> Untersuchen Sie, für welche φ mit

$$\varphi(0, y) = 0 \quad \forall y \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \varphi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

das Randwertproblem (1) lösbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass in der oberen Halbebene $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ das Cauchy-Problem für die Potentialgleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

nicht wohlgestellt ist. Hierbei sind φ und ψ vorgegebene Randdaten, und u ist gesucht.

<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie dazu, dass die Funktionen

$$u_n(x, y) := \frac{1}{n^2}\sinh(ny)\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

$\Delta u_n = 0$ erfüllen und untersuchen Sie die Randdaten $u_n(x, 0)$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, 0)$ auf Konvergenz.