TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 10
Abgabe: 06. Januar 2010

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** *Schwaches Maximumprinzip.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $u_0 \in W^{1,2}(U) \cap L^\infty(\partial U)$. Sei $Lu := \nabla \cdot (A\nabla u) + du$, wobei $A = A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ gleichmäßig elliptisch und $a_{ij} \in L^\infty(U)$, $i,j = 1,\dots,n$, sowie $d \in L^\infty(U)$ und $d \leq 0$ seien. Ferner sei $u \in W^{1,2}(U)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{in} \quad U, \\ u &= u_0 \quad \text{auf} \quad \partial U. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\sup_U u \leq \sup_{\partial U} (u_0)_+$$

gilt.
Hinweis: Testen Sie mit $v(x) := (u - M)_+(x)$, wobei M eine geeignet gewählte Konstante sei, vgl. auch Aufgabe 34.

Aufgabe 36 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und mit C^1-Rand ∂U. Betrachten Sie die Poincaré-Ungleichung

$$\int_U u^2\,dx \leq C \int_U |\nabla u|^2\,dx \quad \text{für} \quad u \in W_0^{1,2}(U),$$

wobei $C > 0$ die optimale Konstante sei. Zeigen Sie, dass dann $C = 1/\lambda_1$ gilt, wobei λ_1 der kleinste Eigenwert von $-\Delta$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie bei Ihrer Argumentation die Tatsache (ohne Beweis), dass eine Orthonormalbasis $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ von $L^2(U)$ mit Eigenfunktionen $w_k \in W_0^{1,2}(U)$ von $-\Delta$ existiert: Für jedes $v \in L^2(U)$ gilt

$$v = \sum_{k=1}^\infty (v, w_k)_{L^2(U)} w_k,$$

wobei diese Reihe in $L^2(U)$ konvergiert.

Aufgabe 37 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und mit C^1-Rand ∂U, und sei $f \in L^2(U)$. Sei ferner die Funktion $W(t) := (t^2 - 1)^2$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann betrachten wir das Funktional

$$\Phi(u) := \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + W(u) - fu \right) dx$$

für $u \in W_0^{1,2}(U)$. Zeigen Sie, dass Φ sein Minimum in $W_0^{1,2}(U)$ annimmt.
Hinweis: Betrachten Sie eine Minimalfolge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(U)$ (das heißt, es gilt $\Phi(u_m) \to \inf_{u \in W_0^{1,2}(U)} \Phi(u)$) und verwenden Sie die Sätze von Rellich und Fatou.

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 37 sei $u \in W_0^{1,2}(U) \cap L^4(U)$ ein Minimierer von Φ. Zeigen Sie, dass u eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u + W'(u) &= f \quad \text{in} \quad U \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial U, \end{aligned}$$

ist, d.h. es gilt

$$\int_U \left(\nabla u \cdot \nabla \phi + W'(u)\phi \right) dx = \int_U f\phi\,dx \quad \text{für alle} \quad \phi \in W_0^{1,2}(U).$$