TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 11
Abgabe: 13. Januar 2010

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass dann $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie diskrete partielle Integration und Aufgabe 24 (vgl. Satz 6.6 aus der Vorlesung).

Aufgabe 40 (4 Punkte)**.** Sei $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass u dann einen Lipschitz-stetigen Repräsentanten hat.
Hinweis: Betrachten Sie Faltung mit Dirac-Folge und zeigen Sie zunächst

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(0,R))}|x-y| \quad \text{für fast alle} \quad x, y \in B(0,R).$$

Aufgabe 41 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $f \in L^2(U)$ und

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_{i=1}^n \partial_i(b_i u) + \sum_{i=1}^n c_i \partial_i u + du$$

ein gleichmäßig elliptischer Operator mit $a_{ij}, b_i \in W^{1,\infty}(U)$ und $c_i, d \in L^\infty(U)$. Sei $u \in W^{1,2}(U)$ schwache Lösung von $Lu = f$. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n \partial_i a_{ij} + b_j + c_j\Big)\partial_j u + \Big(\sum_{i=1}^n \partial_i b_i + d\Big)u = f$$

fast überall in U gilt.