TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 12
Abgabe: 20. Januar 2010

Aufgabe 42 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^1-berandet. Sei $u \in W^{1,2}(U)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u = \lambda u$ für einen Eigenwert $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass dann $u \in C^\infty(U)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) den Sobolevschen Einbettungssatz: Unter obigen Bedingungen an U gilt $C^m(\bar{U}) \subset W^{k,p}(U)$, falls $k - \frac{n}{p} > m$ gilt.

Aufgabe 43. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1]$. Zeigen Sie, dass der Hölder-Raum $C^{k,\alpha}(\bar{U})$ mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{U})} := \sum_{|\gamma| \leq k} \left(\|D^\gamma u\|_{L^\infty(U)} + \text{höl}_{U,\alpha} D^\gamma u \right)$$

ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 44. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1]$. Zeigen Sie,

$$\text{höl}_{U,\alpha}(uv) \leq (\text{höl}_{U,\alpha} u)\|v\|_{L^\infty(U)} + \|u\|_{L^\infty(U)}(\text{höl}_{U,\alpha} v)$$

für $u, v \in C^{0,\alpha}(\bar{U})$ und

$$\|uv\|_{C^{k,\alpha}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{U})}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\bar{U})}$$

für $u, v \in C^{k,\alpha}(\bar{U})$, wobei $C = C(k,n)$ eine positive Konstante ist.

Aufgabe 45. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und einfach zusammenhängend.

(i) Sei $n = 1$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,2}(U)$ einen Repräsentanten in $C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{U})$ besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass die Einbettung $W^{1,2}(U) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{U})$ stetig ist, und zeigen Sie, dass die Einbettung $W^{1,2}(U) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{U})$ für $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ kompakt ist.

(ii) Finden Sie ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass $W^{1,2}(U) \not\subset C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{U})$ für $n = 2$ gilt.