TU Dortmund WS 2009/2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 13
Abgabe: 27. Januar 2010

Aufgabe 46 (4 Punkte)**.** Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $T \in C^{0,\alpha}(\bar{U}_1, \mathbb{R}^n)$ mit $T(U_1) \subset U_2$ und $\alpha \in (0,1]$. Außerdem sei $u \in C^{0,\beta}(\bar{U}_2)$, $\beta \in (0,1]$. Zeigen Sie, dass dann $u \circ T \in C^{0,\alpha\beta}(\bar{U}_1)$ gilt mit

$$\text{höl}_{U_1,\alpha\beta}(u \circ T) \leq (\text{höl}_{U_2,\beta} u)(\text{höl}_{U_1,\alpha} T)^\beta.$$

Aufgabe 47. Sei $p \in [1, \infty]$. Leiten Sie eine notwendige Bedingung an $\alpha \in (0,1]$ für die folgende Aussage her: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} u \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und die skalierten Funktionen $u_\lambda(x) := u(\frac{x}{\lambda})$.

Aufgabe 48. Sei $U \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial U \in C^{0,1}$.

(i) Sei $u \in C^{2,\alpha}(\bar{U})$, $\alpha \in (0,1]$. Zeigen Sie, dass dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(U, n, \alpha, \varepsilon)$ existiert, so dass

$$\|u\|_{C^2(\bar{U})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{U})} + C\|u\|_{L^2(U)}$$

gilt.

(ii) Sei $u \in C^2(\bar{U})$. Zeigen Sie, dass dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(U, n, \varepsilon)$ existiert, so dass

$$\|u\|_{C^1(\bar{U})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^2(\bar{U})} + C\|u\|_{L^2(U)}$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das Ehrling-Lemma (siehe Vorlesung) und den Einbettungssatz für Hölderräume (Proposition 7.6 der Vorlesung).

Aufgabe 49. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : U \to \mathbb{R}$, $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ mit

$$\text{osc}_{B(y,\theta r)} u \leq \frac{1}{2} \text{osc}_{B(y,r)} u < \infty \quad \text{für alle} \quad B(y,r) \subset U,$$

wobei $\text{osc}_{B(y,r)} u := \sup_{B(y,r)} u - \inf_{B(y,r)} u$ die Oszillation von u in $B(y,r)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $V \subset\subset U$

$$u \in C^{0,\alpha}(\bar{V}) \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{\log 2}{\log \theta}$$

gilt.