TU Dortmund WS 2009/2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 2
Abgabe: 28. Oktober 2009

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $n \geq 3$ und $N(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}|x|^{-n+2}$ mit $\alpha(n) = |B(0,1)|$ das Newton-Potential.
Sei weiter $f \in C_c^2(B(0,1))$ und $u = N * f$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \quad \text{für alle } |x| \geq 2.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei $u(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$, die Betragsfunktion. Bestimme die erste und die zweite distributionelle Ableitung von u (genau genommen von T_u).

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset\subset U$ offen. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\sup_{x \in V} |u(x)| \leq C\|u\|_{L^1(U)}$$

für alle $u \in C^2(U) \cap L^1(U)$ mit $\Delta u = 0$ in U gilt.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$, $f \in C^0(\bar{U})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } U, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial U.$$

Beweisen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von n und dem Durchmesser d von U abhängt, sodass gilt:

$$\|u\|_{C^0(\bar{U})} \leq C\|f\|_{C^0(\bar{U})}.$$

Hinweise: Der Durchmesser von U ist gegeben durch $d := \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$. Vergleichen Sie u mit Parabeln und verwenden Sie das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.