TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 3
Abgabe: 4. November 2009

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann ist jede beschränkte Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

von der Form

$$u = N * f + C,$$

wobei N das Newtonpotential und $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass

$$G(x,y) = N(y-x) - N(|x|(y-\bar{x}))$$

die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ ist. Dabei bezeichnet N das Newton-Potential und zu $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$ sei $\bar{x} = x/|x|^2$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** Leiten Sie aus der Poissonformel für $B(0,1)$ (vgl. Satz 2.32 der Vorlesung) eine entsprechende Formel für die Lösung u des Poissonproblems auf $B(0,r)$ her,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } B(0,r), \\ u &= g && \text{auf } \partial B(0,r), \end{aligned}$$

zu gegebenem $g \in C^0(\partial B(0,r))$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1-Rand. Betrachten Sie zu $f \in C^0(\overline{U})$ und $g \in C^0(\partial U)$ das Dirichletproblem

$$\Delta u = f \qquad \text{in } U, \tag{1}$$
$$u = g \qquad \text{auf } \partial U. \tag{2}$$

Sei weiterhin $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) : w = g \text{ auf } \partial U\}$ und für $w \in \mathcal{A}$

$$I(w) := \int_U \Big(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\Big)\,dx.$$

Beweisen Sie: Falls für $u \in \mathcal{A}$

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w)$$

gilt, so löst u das Dirichletproblem (1), (2).
Zusatzaufgabe: (4 Bonuspunkte). Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussage.