TU DORTMUND
PROF. DR. MATTHIAS RÖGER
DR. ANDREAS RÄTZ

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen

Blatt 4

Abgabe: 11. November 2009

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das schwache Maximumprinzip für elliptische Gleichungen aus Satz 3.4 in der Vorlesung.

(1) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Voraussetzung $c \leq 0$ nicht abgeschwächt werden kann.

(2) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass unter den Voraussetzungen von Satz 3.4 die Aussage $\sup_U u \leq \sup_{\partial U} u_+$ nicht zu $\sup_U u \leq \sup_{\partial U} u$ verallgemeinert werden kann.

Aufgabe 14 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit C^2-Rand ∂U. Zeigen Sie, dass dann ∂U in jedem Punkt $x_0 \in \partial U$ eine innere Kugelbedingung erfüllt.

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.** Sei ein offenes beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $B = B(0,1) \subset U$. Für $u \in C^2(U)$ gelte

$$-\Delta u \leq 0 \qquad \text{in } U.$$

Definiere die harmonische Ersetzung $T_B u$ durch

$$(T_B u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in U \setminus B, \\ \int_{\partial B} K(x,y) u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{für } x \in B, \end{cases}$$

wobei K den Poissonkern zu $B(0,1)$ bezeichne,

$$K(x,y) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} |x-y|^{-n}, \quad \alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0,1)).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Es ist $T_B u \in C^2(U \setminus \partial B(0,1))$ und es gilt $-\Delta T_B u \leq 0 \quad$ in $U \setminus \partial B(0,1)$.

(2) $T_B u$ erfüllt $T_B u \geq u \quad$ in U.

(3) Es gilt $-\Delta T_B u \leq 0$ in U im Distributionssinn.

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.** *Maximumprinzip für voll nichtlineare Elliptische Differentialgleichungen.* Bezeichne $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen. Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ schreiben wir $A > B$ falls $A - B$ positiv definit ist, das heißt falls

$$\xi \cdot (A-B)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} (A-B)_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

und schreiben $A \geq B$, falls $\xi \cdot (A-B)\xi \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Eine Funktion $F : \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ heißt *strikt monoton* falls aus $A > B$ folgt, dass $F(A) > F(B)$.

Sei $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$ strikt monoton, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet und seien $u, v \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ gegeben mit

$$-F(\nabla^2 u) \leq -F(\nabla^2 v) \quad \text{in } U, \qquad u \leq v \quad \text{auf } \partial U.$$

Zeigen Sie, dass dann $u \leq v$ in U gilt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $-F(\nabla^2 u) < -F(\nabla^2 v)$ und zeigen Sie, dass $u - v$ sein Maximum nicht in U annehmen kann.