TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 5
Abgabe: 18. November 2009

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** Sei $I := (0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass der Raum $L^2(I)$ nicht folgenkompakt ist. Betrachten Sie dazu z.B. die Funktionenfolge

$$f_k(x) := \sin(kx), k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge im $\mathbb{R}^n$ stark konvergiert.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** Es sei $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ und $1 < p < \infty$. Wir definieren zu festen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, 1)$ die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } k < nx < k + \theta, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \beta & \text{für } k + \theta < nx < k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Graphen einiger Folgeglieder und zeigen Sie:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $n \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ gegen die konstante Funktion $\theta\alpha + (1 - \theta)\beta$.

(ii) Ist $\alpha \neq \beta$, so gibt es keine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die stark in $L^p(I)$ konvergiert.

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < q \leq \infty$. Beweisen Sie:
Falls $u \in L^p(U) \cap L^q(U)$ und $p < r < q$ ist, so folgt $u \in L^r(U)$ und

$$||u||_{L^r(U)} \leq ||u||^{\lambda}_{L^p(U)} ||u||^{1-\lambda}_{L^q(U)},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ durch $\frac{1}{r} = \lambda \cdot \frac{1}{p} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{q}$ bestimmt sei.