TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 6
Abgabe: 25. November 2009

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** Seien $u, v \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p \le \infty$. Beweisen Sie:

(i) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda u + \mu v) \in W^{1,p}(U)$ und es gilt für $i = 1, ..., n$

$$\partial_i(\lambda u + \mu v) \, = \, \lambda \partial_i u + \mu \partial_i v.$$

(ii) Sei $U' \subset\subset U$ offen. Dann ist $u \in W^{1,p}(U')$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $u \in W^{k,p}(U)$. Dann sind die schwachen Ableitungen $D^\gamma u$, $|\gamma| \le k$, eindeutig bestimmt und damit wohldefiniert.

(ii) Seien $u \in W^{1,p}(U)$ und $\zeta \in C_c^\infty(U)$. Dann ist $(\zeta u) \in W^{1,p}(U)$, und es gilt

$$\partial_i(\zeta u) = (\partial_i \zeta) u + \zeta \partial_i u.$$

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** Sei $1 \le p \le \infty$ und $U = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha(x) := |x|^\alpha$$

in $W^{1,p}(U)$ ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** Für $1 < p \le \infty$ gilt $u \in W^{1,p}(U)$ genau dann, wenn $u \in L^p(U)$ und die linearen Funktionale $T_{\partial_i u} : C_c^\infty(U) \to \mathbb{R}$

$$(T_{\partial_i u})(\phi) := \int_U u \partial_i \phi$$

für $i = 1, \dots, n$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und ein $M < \infty$

$$|(T_{\partial_i u})(\phi)| \le M \|\phi\|_{L^{p'}(U)} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

erfüllen.