TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz
WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 8
Abgabe: 09. Dezember 2009

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $B \in L^2(U \times U)$ und sei $\lambda > \|B\|_{L^2(U\times U)}$. Zeigen Sie: Zu $f \in L^2(U)$ existiert genau ein $u \in L^2(U)$, so dass

$$\int_U B(x,y)u(y)\,dy \;=\; \lambda u(x) + f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in U.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $u, v \in L^2(U)$

$$a(u,v) \;:=\; -\int_U \Big(\int_U B(x,y)u(y)v(x)\,dy - \lambda u(x)v(x) \Big)\,dx$$

und benutzen Sie den Satz von Lax-Milgram.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.** *(Bemerkung 5.14 der Vorlesung)*

(i) Sei X ein Vektorraum und $M \subset X$ ein affin linearer Unterraum von X. Sei $u_0 \in M$. Zeigen Sie, dass

$$M_0 := \{u - u_0 : u \in M\}$$

ein linearer Raum ist, und dass M_0 unabhängig von der Wahl von u_0 ist.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet mit C^1-Rand ∂U. Für $u_0 \in W^{1,2}(U)$ definieren wir dann

$$M_{u_0} := \{u \in W^{1,2}(U) : u = u_0 \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-fast-überall auf} \quad \partial U\}.$$

Zeigen Sie, dass $M_{u_0} \subset W^{1,2}(U)$ ein affin linearer Unterraum ist, und dass

$$M_{u_0} = \{u \in W^{1,2}(U) : u - u_0 \in W_0^{1,2}(U)\}$$

gilt.

Aufgabe 29 (4 Punkte)**.** *(Poincaré-Ungleichung)*

(i) Betrachten Sie für $B_R := B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$ die Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(B_R)} \le C_{B_R} \|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \quad \text{für} \quad u \in W_0^{1,2}(B_R)$$

mit der optimalen Konstanten $C_{B_R} > 0$. Finden Sie für beliebige $R > 0$ eine Relation zwischen C_{B_R} und C_{B_1}.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass es keine Poincaré-Ungleichung der Form

$$\|u\|_{L^2(U)} \le C \|\nabla u\|_{L^2(U)} \quad \text{für} \quad u \in W_0^{1,2}(U)$$

geben kann, falls U beliebig große offene Kugeln enthält.

Aufgabe 30 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in W_0^{1,2}(U) \cap L^\infty(U)$ eine schwache Lösung von $\nabla \cdot (A\nabla u) = 0$, wobei $A = A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ gleichmäßig elliptisch und $a_{ij} \in L^\infty(U)$, $i,j = 1,\ldots,n$ sei. Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass dann $w := \phi(u)$ die Relation

$$\int_U A\nabla w \cdot \nabla v dx \le 0 \quad \text{für alle} \quad v \in C_c^\infty(U) \quad \text{mit} \quad v \ge 0$$

erfüllt. Folgern Sie, dass w eine schwache Lösung der Ungleichung $\nabla \cdot (A\nabla w) \ge 0$ ist.