TU DORTMUND
PROF. DR. MATTHIAS RÖGER
DR. ANDREAS RÄTZ

WS 2009/2010

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 9
Abgabe: 16. Dezember 2009

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und zusammenhängend und $f \in L^2(U)$. Ferner bezeichne ν die äußere Normale von U. Eine Funktion $u \in W^{1,2}(U)$ ist eine schwache Lösung des *Neumann Problems*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad U \\ \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf} \quad \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

falls

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_U f \phi \, dx \quad \text{für alle} \quad \phi \in W^{1,2}(U)$$

gilt.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\int_U f \, dx = 0 \tag{2}$$
notwendig für die Existenz einer schwachen Lösung von (1) ist.

(ii) Es gelte (2). Zeigen Sie, dass dann genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(U)$ von (1) mit
$$\int_U u \, dx = 0$$
existiert.

Hinweis für (ii): Wenden Sie den Satz von Lax-Milgram auf den Raum

$$M := \left\{ u \in W^{1,2}(U) : \int_U u \, dx = 0 \right\}$$

an.

Aufgabe 32 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $f \in L^2(U)$. Dann ist $u \in W_0^{2,2}(U)$ eine schwache Lösung der *biharmonischen Gleichung*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \quad \text{in} \quad U \\ u = \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf} \quad \partial U, \end{cases} \tag{3}$$

falls

$$\int_U \Delta u \cdot \Delta \phi \, dx = \int_U f \phi \quad \text{für alle} \quad \phi \in W_0^{2,2}(U)$$

gilt. Zeigen Sie, dass (3) eine eindeutige schwache Lösung besitzt.

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** *Modifizierte Poincaré-Ungleichung.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit C^1-Rand ∂U. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\int_U u^2 \, dx \le C \left(\int_U |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial U} u^2 \, dx \right) \quad \text{für alle} \quad u \in W^{1,2}(U)$$

gilt.
Hinweis: Argumentieren Sie wie in Satz 5.17 der Vorlesung durch Widerspruch.

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** Sei $1 \leq p < \infty$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Ferner sei $u \in W^{1,p}(U)$. Zeigen Sie, dass dann der positive Anteil $u_+(x) = \max\{0, u(x)\}$ von u ebenfalls in $W^{1,p}(U)$ liegt und

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u & \text{f.ü. in} \quad \{u > 0\} \\ 0 & \text{f.ü. in} \quad \{u \leq 0\} \end{cases}$$

erfüllt.
Hinweis: Approximieren Sie u_+ durch

$$F_\epsilon(u) := \begin{cases} \sqrt{u^2 + \epsilon^2} - \epsilon & \text{für} \quad u \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad u < 0 \end{cases}$$

und verwenden Sie die Kettenregel in Satz 4.36.