TU Dortmund SS 2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 1
Abgabe: 30. April 2010

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Lagrange-Funktion.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner seien $\phi, f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Finden Sie eine Lagrange-Funktion $L = L(p, z, x)$, $(p, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U$, so dass die Gleichung

$$-\Delta u + \nabla\phi \cdot \nabla u = f \quad \text{in} \quad U$$

die Euler-Lagrange-Gleichung zum Funktional

$$I[w] := \int_U L(\nabla w, w, x)\,\mathrm{d}x$$

ist.
Hinweis: Suchen Sie eine Lagrange-Funktion, die einen Exponential-Term mit ϕ enthält.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Die Lagrange-Funktion $L = L(p, z, x)$, $(p, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U$, habe die Eigenschaft, dass die Abbildung $(p, z) \mapsto L(p, z, x)$ für jedes $x \in U$ konvex ist. Für $g \in L^q(\partial U)$ sei

$$M := \{w \in W^{1,q}(U) : w = g \quad \text{auf} \quad \partial U\}$$

für $q \in (1, \infty)$ die zulässige Menge und $u \in M$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) &= 0 \quad \text{in} \quad U \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial U \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Dann ist u Minimierer von

$$I[w] := \int_U L(\nabla w, w, x)\,\mathrm{d}x$$

in M.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Versagen der direkten Methode.* Betrachten Sie für das Intervall $U = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ das Funktional

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2}|w'|^2\,\mathrm{d}x$$

und die zulässige Menge

$$M := \big\{w \in W^{1,2}(U) : w'(0) = -1, w'(1) = 1\big\}.$$

Bestimmen Sie $\inf_{w\in M} I[w]$, und finden Sie eine Minimalfolge, deren Grenzfunktion nicht in M liegt.