TU Dortmund SS 2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 10
Abgabe: 2. Juli 2010

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** *Fortsetzung von Aufgabe 26.* Für $\zeta \in C_c^\infty([0,T) \times U)$ sei

$$\begin{cases} \zeta^h(x,t) := \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{(k-1)h}^{kh} \zeta(x,s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für} \quad t \in ((k-1)h, kh], k = 1, \dots, N, x \in U, \\ \zeta^h(x,t) := \zeta(x,0) \quad \text{für} \quad t \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^T \int_U \Big(\partial_t^h \zeta^h (u^h - g) - \nabla \zeta^h \cdot \nabla u^h \Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

für hinreichend kleines h gilt.

Aufgabe 28. *Fortsetzung von Aufgabe 27.* Beweisen Sie für alle $s \in (0,T)$ die Abschätzung

$$\int_0^{T-s} \|u^h(\cdot + s) - u^h\|_{L^2(U)}^2 \leq sC, \tag{3}$$

wobei die Konstante C nur von den Daten abhängt (vgl. 11.19 der Vorlesung).

Aufgabe 29. *Fortsetzung von Aufgabe 28.* Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(U))$ von

$$\int_0^T \int_U (\partial_t \zeta (u-g) - \nabla\zeta \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \zeta \in C_c^\infty([0,T) \times U). \tag{4}$$

Tipp: Zeigen Sie, dass die zeit-diskreten Lösungen u^h gegen einen Grenzwert konvergieren und betrachten Sie $h \to 0$ in (2).