TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2010

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 11
Abgabe: 9. Juli 2010

Aufgabe 30. (i) Betrachten Sie die Funktionen $u^h : U \times [0,T) \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 26. Zeigen Sie, dass

$$u^h(t) = F_-^{h,t} g := (\mathrm{Id} - h\Delta)^{-[\frac{t}{h}]} g \tag{1}$$

für den in (1) definierten (Rückwärts–)Operator $F_-^{h,t} : L^2(U) \to W_0^{1,2}(U)$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass $F_-^{h,t}$ ein linearer, beschränkter Operator ist.

(ii) Betrachten Sie nun für $g \in C^\infty(U)$ das (Vorwärts–)Schema

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left(v_k^h - v_{k-1}^h\right) = \Delta v_{k-1}^h \quad \text{in} \quad U, \\ \qquad\qquad v_k^h = 0 \quad \text{auf} \quad \partial U \end{cases} \tag{2}$$

für $k = 1, \ldots, N$. Definieren Sie $v^h : U \times [0,T) \to \mathbb{R}$ durch $v^h(\cdot, 0) := g$ und

$$v^h(x,t) := v_k^h(x) \quad \text{für} \quad t \in ((k-1)h, kh], k = 1, \ldots, N, x \in U.$$

Geben Sie analog zu (1) einen (Vorwärts–)Operator $F_+^{h,t}$ an, so dass

$$v^h(t) = F_+^{h,t} g \tag{3}$$

gilt. Ist dieser Operator beschränkt?

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** *Parabolischer p–Laplace.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner seien $g \in L^p(U)$, $T > 0$, $p \in (1, \infty)$ und $p > \frac{2n}{n+2}$. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(U))$ von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta_p u &= 0 \quad \text{in } U_T, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial U \times [0,T], \qquad u(\cdot,0) = g \quad \text{in } U. \end{aligned}$$

Aufgabe 32. *Parabolischer Bi–Laplace.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner seien $g \in W_0^{2,2}(U)$, $T > 0$. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $u \in L^2(0,T; W_0^{2,2}(U))$ von

$$\begin{aligned} \partial_t u + \Delta^2 u &= 0 \quad \text{in } U_T, \\ u &= 0, \quad \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \partial U \times [0,T], \qquad u(\cdot,0) = g \quad \text{in } U. \end{aligned}$$