TU DORTMUND SS 2010
PROF. DR. MATTHIAS RÖGER
DR. ANDREAS RÄTZ

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 12
Abgabe: 16. Juli 2010

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** Sei (X,d) ein vollständiger, metrischer Raum und $A \subset X$ präkompakt. Zeigen Sie, dass dann jede Folge in A eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** *Galerkin-Verfahren.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner sei $g \in L^2(U)$, $T > 0$. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(U))$ von

$$\int_0^T \int_U (\partial_t \zeta (u-g) - \nabla \zeta \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \zeta \in C_c^\infty([0,T) \times U). \tag{1}$$

Benutzen Sie dazu das Galerkin-Verfahren:

(i) Wählen Sie eine geeignete Basis $w_1, w_2, \dots$ von $W_0^{1,2}(U)$ und diskretisieren Sie für $K \in \mathbb{N}$ im Raum mit endlichdimensionalen Unterräumen $V_K := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_K\} \subset W_0^{1,2}(U)$ und finden Sie Lösungen $u_K : [0,T] \to V_K$ der approximativen Gleichung

$$\int_U (\partial_t u_K(t) w_k + \nabla u_K(t) \cdot \nabla w_k) \,\mathrm{d}x = 0$$

für $k \in \mathbb{N}$, $k \le K$ mit geeigneter Anfangsbedinung.

(ii) Zeigen Sie

$$\sup_{t \in [0,T]} \frac{1}{2} \|u_K(t)\|^2_{L^2(U)} + \int_0^T \|u_K(s)\|^2_{W^{1,2}(U)} \,\mathrm{d}s \le C \|g\|^2_{L^2(U)}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^T \int_U (\partial_t \zeta (u_K - g) - \nabla \zeta \cdot \nabla u_K) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \zeta \in C_c^\infty([0,T), V_M)$$

gilt, wobei $M \in \mathbb{N}$, $M < K$ sei.

(iv) Zeigen Sie, dass für eine Teilfolge $K \to \infty$

$$u_K \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad L^2(0,T;W_0^{1,2}(U))$$

für ein $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(U))$, und beweisen Sie, dass u (1) erfüllt.

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex und nichtleer. Wir definieren

$$I[x] := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in K \\ +\infty & \text{für} \quad x \notin K. \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Subdifferential ∂I.