TU DORTMUND
PROF. DR. MATTHIAS RÖGER
DR. ANDREAS RÄTZ

SS 2010

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 2
Abgabe: 7. Mai 2010

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Flächen-Funktional.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet, und sei u ein glatter Minimierer des Flächen-Funktionals

$$I(w) := \int_U \sqrt{1 + |\nabla w|^2}\,\mathrm{d}x$$

mit gegebener Randbedingung $w = g$ auf ∂U und Nebenbedingung

$$J(w) = \int_U w\,\mathrm{d}x = 1.$$

Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung. (Diese besagt, dass der Graph von u eine Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung ist.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** *Zweite Variation.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner sei eine glatte Lagrange-Funktion $L = L(p, z, x)$, $(p, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U$ gegeben und ein Funktional

$$I(w) := \int_U L(\nabla w, w, x)\,\mathrm{d}x.$$

Ferner sei

$$i(\tau) := I(u + \tau v)$$

für $\tau \in \mathbb{R}$, $v \in C_c^\infty(U)$ und einen glatten Minimierer $u : U \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie $i''(0)$. (Aus der notwendigen Bedingung $i''(0) \geq 0$ kann man eine Elliptizitätsbedingung von L entlang u folgern.)

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie für $U := (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $w \in M := W_0^{1,4}((0,1))$ das Funktional

$$I(w) := \int_0^1 (w^2(x) + (w'(x)^2 - 1)^2)\,\mathrm{d}x.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\inf_{w \in M} I(w) = 0$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass es kein $u \in M$ gibt, so dass $I(u) = 0$ gilt.
(iii) Warum funktioniert bei diesem Variationsproblem der Existenzsatz 8.6 aus der Vorlesung nicht?

Hinweis: Verwenden Sie in (i) eine Folge von "Sägezahn-Funktionen".