TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2010

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 4

Abgabe: 21. Mai 2010

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** *Strikt monotone Operatoren.* Seien V ein separabler, reflexiver Banachraum und $M \subset V$ abgeschlossen, konvex und nichtleer. Sei ein monotoner Operator $A : M \to V^*$ gegeben, der *strikt monoton* ist, d.h. es gilt

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad u, v \in M \quad \text{mit} \quad u \neq v.$$

(i) Zeigen Sie, dass es höchstens eine Lösung u der Variationsungleichung

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq 0 \quad \forall v \in M \tag{VU}$$

gibt.

(ii) Zeigen Sie: Falls A zusätzlich die Beschränktheits- und Koerzivitätsbedingungen 9.8 (1)-(2) erfüllt, dann existiert eine Abbildung $B : V^* \to M$, so dass $B(u^*)$ die eindeutige Lösung der Variationsungleichung für $u \mapsto A(u) - u^*$ auf M ist. Ist $M = V$, so ist $A : V \to V^*$ bijektiv und $B = A^{-1}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** *Korollar zu 9.18.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner seien $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{np}{n(p-1)+p}$. Zeigen Sie, dass für $f \in L^r(U)$,

$$\begin{cases} r = q & \text{für} \quad p < n, \\ r > 1 & \text{für} \quad p = n, \\ r = 1 & \text{für} \quad p > n, \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,p}(U)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = f \quad & \text{in} \quad U, \\ u = 0 \quad & \text{auf} \quad \partial U \end{aligned}$$

existiert.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 4$, offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner seien $f \in C^0(\overline{U})$ und $W(t) := (t^2 - 1)^2$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(U)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} W'(u) = f \quad & \text{in} \quad U, \\ u = 0 \quad & \text{auf} \quad \partial U \end{aligned}$$

existiert (vgl. Aufgaben 37, 38 (WS)).