TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2010

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 5
Abgabe: 28. Mai 2010

Aufgabe 13 (4 Punkte). *Energiegleichung für inkompressible Navier-Stokes Gleichungen.* Betrachten Sie für ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ und $T > 0$ das Anfangsrandwertproblem für die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t v_i + \nabla \cdot (v_i v) - a\Delta v_i &= \partial_i p \quad && \text{in} \quad U \times [0,T] \\ \nabla \cdot v &= 0 && \text{in} \quad U \times [0,T] \\ v &= 0 && \text{auf} \quad \partial U \times [0,T] \\ v &= g && \text{in} \quad U \times \{0\} \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und eine glatte Anfangsgeschwindigkeit $g : U \to \mathbb{R}^n$. Dabei seien $v : \overline{U} \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ und $p : \overline{U} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ klassische Lösungen und hinreichend differenzierbar in Raum- und Zeitvariablen. Zeigen Sie die Energiegleichung

$$\|v(t)\|^2_{L^2(U)} + 2a \int_0^t \|\nabla v\|^2_{L^2(U)} \, \mathrm{d}s = \|g\|^2_{L^2(U)}.$$

Aufgabe 14 (4 Punkte). Sei $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt und

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2t\partial_t u(x,t)$ eine weitere Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Hinweis: (ii) Benützen Sie (i) oder berechnen Sie zuerst $(\partial_t - \Delta)(u_1 u_2)$ für zwei Lösungen u_1, u_2 der Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner bezeichnet ν die äußere Normale an ∂U, und sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass es für glatte Anfangsdaten $g : U \times \{0\} \to \mathbb{R}$ und rechte Seite $f : U \times [0,T] \to \mathbb{R}$ höchstens eine glatte Lösung $u : U \times [0,T] \to \mathbb{R}$ für das folgende Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad && \text{in} \quad U \times [0,T] \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf} \quad \partial U \times [0,T] \\ u &= g && \text{in} \quad U \times \{0\} \end{aligned}$$

der Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingung gibt.