TU Dortmund SS 2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 6
Abgabe: 04. Juni 2010

Aufgabe 15 (4 Punkte). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner bezeichnet ν die äußere Normale an ∂U, und sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass es für glatte Anfangsdaten $g : U \times \{0\} \to \mathbb{R}$ und rechte Seite $f : U \times [0,T] \to \mathbb{R}$ höchstens eine glatte Lösung $u : U \times [0,T] \to \mathbb{R}$ für das folgende Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad && \text{in} \quad U \times [0,T] \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf} \quad \partial U \times [0,T] \\ u &= g && \text{in} \quad U \times \{0\} \end{aligned}$$

der Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingung gibt.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Sei

$$K(x,t) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

der Wärmeleitungskern.
Zu gegebenem $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) g(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$|\hat{u}(\xi,t)| \le C e^{-t|\xi|^2}$$

gilt, wobei $\hat{}$ die Fouriertransformation bezeichnet.

Aufgabe 17 (4 Punkte). Sei K wie in Aufgabe 16, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) g(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\|u(\cdot,t) - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{mit } t \searrow 0.$$

Tipp: Benutzen Sie (ohne Beweis) eine Zerlegung $g = g_1 + g_2$ mit $g_1 \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ und $\|g_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.