TU Dortmund SS 2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 7
Abgabe: 11. Juni 2010

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie den Wärmeleitungskern

$$K(x,t) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

und definieren Sie zu $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)g(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

(i) Bestimmen Sie u für $g(x) = (4\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\sigma}}$.
Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Überlegen Sie dazu, welchem Anfangswertproblem die Abbildung $(x,\sigma) \mapsto (4\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\sigma}}$ genügt.
(ii) Sei $g \in C^0_c(B^n(0,1))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = 1$ und $g \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass ein $M > 0$ existiert, sodass

$$\lim_{t\to\infty} \int_{B(0,M\sqrt{t})} u(x,t)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: (i) Verwenden Sie eine geeignete quadratische Ergänzung. (ii) Benützen Sie eine Variablentransformation $x = \sqrt{t}\xi$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** *Bemerkung 10.11.* Sei U offen, beschränkt und glatt berandet, $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$, $g \in C^0(\overline{U})$ und gelte

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } U_T,$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial U \times [0,T], \qquad u(\cdot,0) = g \quad \text{in } U.$$

Zeigen Sie, dass $u(x,t) > 0$ für alle $x \in U, t > 0$ gilt, falls $g \geq 0$ und $g \not\equiv 0$.

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Sei L ein gleichmäßig parabolischer Operator in Nicht-Divergenzform wie in 10.17 mit $c = 0$. Ferner erfüllen $u, v \in C^{2,1}(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$ als Lösung bzw. Sublösung die Relationen $\partial_t u + Lu = 0$ in U_T und $\partial_t v + Lv \leq 0$ in U_T sowie $u = v$ auf Γ_T. Zeigen Sie, dass dann $v \leq u$ in U_T gilt. Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für den Fall, dass v Superlösung ist.