TU Dortmund SS 2010
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Partielle Differentialgleichungen II
Blatt 8
Abgabe: 18. Juni 2010

Aufgabe 21 (4 Punkte). *Starkes Maximum-Prinzip für $c \geq 0$.* Sei L ein gleichmäßig parabolischer Operator in Nicht-Divergenzform wie in 10.17 mit $c \geq 0$ in U_T. Sei $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$. Zeigen Sie: Falls

$$\partial_t u + Lu \leq 0 \quad \text{in} \quad U_T$$

und $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U}_T} u = 0$ für ein $(x_0, t_0) \in U_T$ gilt, dann ist u konstant in U_{t_0} (vgl. Schritt 1 im Beweis von Satz 10.23). Passen Sie hierbei den Beweis von 10.22 an, aber verwenden Sie nicht Satz 10.23.

Aufgabe 22 (4 Punkte). *Maximum-Prinzip für Allen-Cahn I.* Für $\varepsilon > 0$ sei $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$ Lösung der Allen-Cahn-Gleichung

$$\varepsilon \partial_t u = \varepsilon \Delta u - \varepsilon^{-1} W'(u) \quad \text{in} \quad U_T,$$

wobei $W(u) := \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ sei. Zeigen Sie mit der Energie-Methode, dass aus $|u| \leq 1$ auf Γ_T auch $|u| \leq 1$ in U_T folgt.
<u>Hinweis:</u> Testen Sie die Allen-Cahn-Gleichung mit $(u-1)^+$ und $(u+1)^-$.

Aufgabe 23 (4 Punkte). *Maximum-Prinzip für Allen-Cahn II.* Beweisen Sie die Aussage aus Aufgabe 22 mit klassischen Methoden (vgl. Satz 10.18 der Vorlesung).