TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2010

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 9

Abgabe: 25. Juni 2010

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** Seien V reflexiver Banachraum, H Hilbertraum, $g \in H$ und $V \hookrightarrow H$ linear und stetig. Sei ferner $w \in L^{p*}(0,T;V^*)$ gegeben, und $u \in L^p(0,T;V)$ erfülle

$$\int_0^T \left(-(\partial_t \zeta(t), u(t) - g)_H + \langle w(t), \zeta(t)\rangle\right) \mathrm{d}t = 0$$

für alle $\zeta \in C_c^\infty([0,T);V)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t_0)\|_H^2 - \|g\|_H^2\right) + \int_0^{t_0} \langle w(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t = 0$$

für fast alle $t_0 \in (0,T)$.

Tipp: Benutzen Sie, dass in 11.11 der Vorlesung "$\leq$" gezeigt wurde und wählen Sie

$$\zeta(t) := \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} \chi_{(-h,t_0)}(s) u(s)\,\mathrm{d}s.$$

für $h > 0$. Begründen Sie auch, warum ζ zulässige Testfunktion ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt berandet. Ferner seien $g \in L^2(U)$, $T > 0$ und $h := \frac{T}{N}$ für $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für $u_0^h := g$ existieren schwache Lösungen $u_k^h \in W_0^{1,2}(U) \cap W^{2,2}(U)$, $k = 1,\dots,N$ von

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right) = \Delta u_k^h \quad \text{in} \quad U, \\ \qquad\qquad\quad u_k^h = 0 \quad \text{auf} \quad \partial U \end{cases} \tag{1}$$

für $k = 1,\dots,N$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** *Fortsetzung von Aufgabe 25.* Sei $u^h : [0,T) \times U$ definiert durch $u^h(\cdot,0) := g$ und

$$u^h(x,t) := u_k^h(x) \quad \text{für} \quad t \in ((k-1)h, kh], k = 1,\dots,N, x \in U.$$

Zeigen Sie die Energieabschätzung

$$\sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{2}||u^h(t)||_{L^2(U)}^2 + \int_0^T ||\nabla u^h(t)||_{L^2(U)}^2 \,\mathrm{d}t \leq ||g||_{L^2(U)}^2. \tag{2}$$