Kapitel 1 – Mengen

Beispiel: Die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich Eins sind, kann mit mathematischen Symbolen als

$$\{x \in \mathbb{R} | \, x \leq 1\} \text{ oder } (-\infty, 1]$$

geschrieben werden.

Für das Verständnis ist die Kenntnis der einzelnen Bestandteile nötig:

- $\{\,\}$: Mengenklammern (Was ist eine Menge?)
- x: Variable (Was ist eine Variable?)
- $\in$, $|$, $\leq$, $($, $]$, ∞ (Was bedeuten diese Zeichen?)
- $\mathbb{R}$: reelle Zahlen (Was sind reelle Zahlen?)

Wichtig: Nicht nur die Bedeutung der einzelnen Symbole, sondern auch deren Reihenfolge und Verknüpfung ist entscheidend.

$\rightarrow$ Mathematischer Formalismus ist wie eine Fremdsprache.

Definition 1.1 (Mengen)

Unter einer MENGE *verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit.*
Diese Objekte heißen dann ELEMENTE *der Menge.*

Beschreibung von Mengen durch ...

- ... Aufzählen aller Elemente mit Mengenklammern $\{\ldots\}$.
- ... Angabe einer Eigenschaft E, die die Elemente beschreibt:

$$\{x \,|\, x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Schreibweise: Sei M eine Menge.

- Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir kurz $x \in M$.
- Ist x kein Element der Menge M, so schreiben wir kurz $x \notin M$.

1. Beispiele zur Aufzählung mit Mengenklammern

- $\{1, 2, 3\}$ Die Menge, die aus den Zahlen $1, 2, 3$ als Elemente besteht.
- $\{1, 2, 3, 2\} = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ Mehrfachnennungen verändern nichts und die Reihenfolge der Elemente ist egal.
- {r,m,d,t,o,u,n} Menge der Kleinbuchstaben im Wort "Dortmund".
- $\{\}$ ist die LEERE MENGE, die kein Element enthält. Alternative Notation: $\emptyset$.

Eine neue Notation kann man symbolisch durch $:=$ einführen. Lese ":=" als "wird definiert durch".

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN. Die Punkte $\ldots$ führen die Liste "sinnvoll" weiter.
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN MIT NULL.
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Die Menge der GANZEN ZAHLEN.

1. Beispiele zur Aufzählung mit definierender Eigenschaft

- Für eine natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathbb{N}^{\geq k} := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq k\}$. Die Menge der natürlichen Zahlen, die größer oder gleich k sind.
- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$. Die Menge der RATIONALEN ZAHLEN.
- $\mathbb{R}$ Die Menge der REELLEN ZAHLEN, vgl. später.
- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = x\} = \{0, 1\}$. Diese Menge lässt sich sowohl aufzählen als auch beschreiben.
- $\{v \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq v \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$. Der Name des Platzhalters (Variable) ist bedeutungslos.

<u>Beispiele für $\in$ und $\notin$:</u>

$$1 \in \mathbb{N}, \quad 1 \notin \mathbb{N}^{\geq 3}, \quad -4 \in \mathbb{Q}, \text{ da } -4 = \frac{-4}{1}$$

Definition 1.2 (Mengenoperationen)

Es seien M und N Mengen.

1. VEREINIGUNG: *Menge der Elemente aus M oder N:*

$$M \cup N = \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

2. SCHNITT: *Die Menge der Elemente, die in M und in N liegen.*

$$M \cap N = \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

3. DIFFERENZ *von N und M. Die Menge der Elemente, die in N enthalten sind, aber nicht in M.*

$$N \setminus M := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}$$

.

Beispiele:

$$\{1,3\} \setminus \{3,4\} = \{1\}, \quad \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 1\}, \quad \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

Definition 1.3 (Mengenrelationen)

Es seien M und N Mengen.

1. M *und* N *heißen* DISJUNKT, *wenn* $M \cap N = \emptyset$.
2. M *heißt* TEILMENGE VON N, *wenn alle Elemente von* M *auch in* N *enthalten sind. Symbolisch:*

$$M \subset N \text{ oder } N \supset M.$$

3. *Ist* $M \subset N$, *so ist das* KOMPLEMENT *von* M *in* N *durch* $M^c := N \setminus M$ *definiert.*
4. M *und* N *sind* GLEICH, *wenn* $M \subset N$ *und* $N \subset M$, *wenn also* M *und* N *die gleichen Elemente enthalten.*

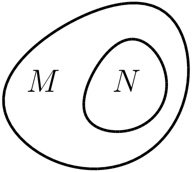
Beispiele:

$$\emptyset \subset M \subset M \quad \text{für alle Mengen } M$$

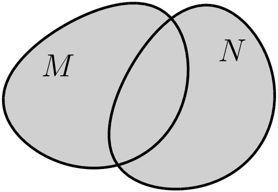
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Achtung: Manchmal wird das Symbol $\subseteq$ anstelle von $\subset$ verwendet.

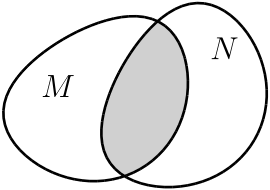
Graphisch kann man die Mengenoperationen gut mit Hilfe von VENN-DIAGRAMMEN darstellen:



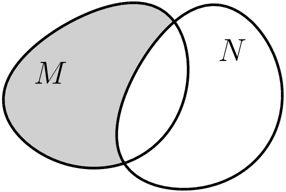
$N \subset M$



$M \cup N$



$M \cap N$



$M \setminus N$

Satz 1.4 (Rechenregeln für Mengenoperationen)

1. Kommutativität:

$$M \cup N = N \cup M \text{ und } M \cap N = N \cap M.$$

2. Assoziativität:

$$(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P) \text{ und } (M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$$

3. Distributivität:

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P) \text{ und } M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

4. De Morgansche Regeln:

$$M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P) \text{ und } M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$$

Komplemente:

$$(M \cup N)^c = M^c \cap N^c \text{ und } (M \cap N)^c = M^c \cup N^c$$

Definition 1.5 (Kartesisches Produkt)

1. *Das* KARTESISCHE PRODUKT $M \times N$ *zweier Mengen* M *und* N *enthält als Elemente die geordneten Paare* (m, n) *mit* $m \in M$ *und* $n \in N$*:*

$$M \times N = \{(m, n) \,|\, m \in M \text{ und } n \in N\}\,.$$

Achtung: Die Reihenfolge ist bei Paaren wichtig:

$$(a, b) = (x, y) \text{ bedeutet } a = x \text{ und } b = y.$$

2. *Das kartesische Produkt mehrerer Mengen* $M_1, \ldots, M_k$ *wird analog definiert. Beispiel:*

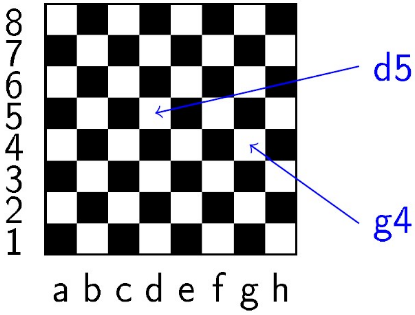
$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Die Elemente heißen TUPEL*: Paare sind 2-Tupel, 3-Tupel sind Tripel, 4-Tupel sind Quadrupel. Allgemein:* n*-Tupel.*

Vorsicht: $(a, b) \neq \{a, b\}$.

Die Positionen auf einem Schachbrett werden mit einem kartesischen Produkt beschrieben:

$$(d, 5), (g, 4) \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



Aufgabe: Drücke Folgendes mit mathematischen Symbolen aus:

Es gibt (mindestens) eine reelle Zahl x, die die Gleichung $x^2 = 1$ löst.

Definition 1.6 (Quantoren)

Ist A eine Eigenschaft, die für die Elemente einer Menge M sinnvoll ist, so schreiben wir

$$\forall x \in M : A(x)\,,$$

wenn jedes Element aus M die Eigenschaft A hat – in Worten: für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ und

$$\exists x \in M : A(x)\,,$$

wenn es mindestens ein Element aus M gibt, das die Eigenschaft A hat – in Worten: es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$.

Beispiel oben:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1.$$