TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. Agnes Lamacz-Keymling

Lösungen der Übungsblätter 6-10

Blatt 6

Aufgabe 1)

a) $135^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{135}{360}2\pi = \frac{3\pi}{4}$

b) $5 \mathrel{\widehat{=}} \frac{5}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{900}{\pi}^\circ$

c) Der Umfang eines Kreises mit Radius 3 ist $2\pi \cdot 3 = 6\pi$, insbesondere gilt $5 = \frac{5}{6\pi} \cdot 6\pi$. Damit ist der gesuchte Winkel $\frac{5}{6\pi} \cdot 2\pi = \frac{5}{3} \mathrel{\widehat{=}} \frac{5}{3} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{300}{\pi}$.

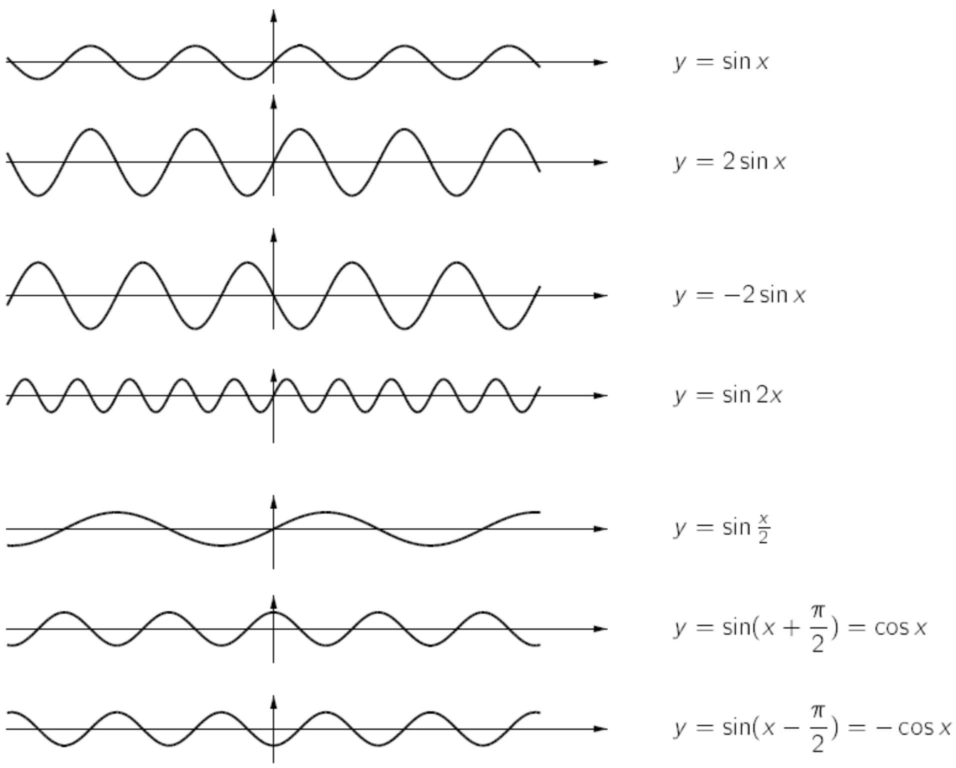
Aufgabe 2)

a) Pythagoras

b) $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) Direkt am Einheitskreis ablesen.

Aufgabe 3)



Aufgabe 4)

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Aufgabe 5)

a) Es gilt

$$\frac{1}{2}(\cos(2x) + 1) = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x + 1) = \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\underbrace{(1 - \sin^2 x)}_{=\cos^2 x} = \cos^2 x$$

b) $\sqrt{1 + \cos x} \cdot \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$.

c) Wegen $\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$ folgt mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y =& \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ =& 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Blatt 7

Aufgabe 1)

a)

$$x \in \left\{0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$$

b)

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 2)

a) Definitionsbereich $D = [-1, 1]$ und

$$\sin(\arccos x) \overset{\arccos x \in [0,\pi]}{=} \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

b) Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) Definitionsbereich $D = [-1, 1]$ und

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = 1$$

Aufgabe 3)

a) Die Funktion f ist stetig.

b) g ist in $x_0 = 2$ unstetig, überall sonst stetig.

c) h ist in allen Punkten $x_0 = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ unstetig, sonst stetig.

Aufgabe 4)

a) Die Steigung der Tangente ist $= 1$ und die Tangentengleichung ist gegeben durch

$$y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = x - \frac{3}{4}.$$

b) i) $x_0 = 1$ oder $x_0 = 3$.

ii) Nur in $x_0 = 3$ hat die Tangente die Form $y = -x$.

Aufgabe 5)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 6)

a) $f'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$

b) $f'(x) = 3\cos x$

c) $f'(x) = \cos x$

d) $f'(x) = 3\cos(3x)$

e) $f'(x) = (3 + 35x^4)\cos(2x) + (3x + 7x^5)(-2)\sin(2x)$

f) $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

g) $f'(x) = \frac{-\sin x(x^2+4) - 2x\cos x}{(x^2+4)^2}$

h) $f'(x) = 4(22x^2 - 2x^{22})^3(44x - 44x^{21}) = 1408 \cdot x^7(11 - x^{20})^3(1 - x^{20})$

i) $f'(x) = 2\sin(2x^2)\cos(2x^2)4x = 8x\sin(2x^2)\cos(2x^2)$

Blatt 8

Aufgabe 1)

a) $f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}(4-x)^{-3/2}(8-x)$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos x - \arcsin x)$

e) $f'(x) = \arcsin x$

f) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 2)

a) $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}$.

c) $f'(x) = \frac{4x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$

d) $f(x) = (\sqrt{x})^5$ und nach der Kettenregel $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

e) $f(x) = \frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}$ und nach der Kettenregel

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

Aufgabe 3)

a) Es gilt $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)^2} + 1}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und Ableitung

$$(f \circ g)'(x) = -\frac{x}{(x-1)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{(x-1)^2} + 1}}.$$

Es gilt $(g \circ f)(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-1}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Ableitung

$$(g \circ f)'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b) Es gilt $(f \circ g)(x) = (2x-1)^2$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Ableitung

$$(f \circ g)'(x) = 4(2x-1).$$

Es gilt $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Ableitung

$$(g \circ f)'(x) = 4x.$$

Aufgabe 4)

a) $2^n \sin 2x$ für $n = 4k$, $2^n \cos 2x$ für $n = 4k+1$, $-2^n \sin 2x$ für $n = 4k+2$, $-2^n \cos 2x$ für $n = 4k+3$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$. Alternativ:

$$f^{(}n)(x) = \begin{cases} 2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sin(2x), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(2x), & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Aufgabe 5)

Für $a \geq 0$ hat f in $x = 0$ ein lokales Minimum, für $a < 0$ hat f in $x = 0$ ein lokales Maximum, und jeweils ein lokales Minimum in $x = \pm\sqrt{\frac{-a}{2}}$.

Blatt 9

Aufgabe 1)

f hat in $x = 1$ ein lokales Maximum und in $x = -1$ ein lokales Minimum.
f ist für $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ linksgekrümmt und für $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ rechtsgekrümmt.

Aufgabe 2)

$b = 2$, $c = -4$ und $d = -3$.

Aufgabe 3)

Der maximale Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{16}$.

Aufgabe 4)

a) $\int 2x^3 + x^2 - 4x + 3\,dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + c$

b) $\int \frac{3}{x^5}\,dx = -\frac{3}{4}\frac{1}{x^4} + c$

c) $\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{-1}{x+1} + c$

d) $\int \sin(x+2)\,dx = -\cos(x+2) + c$

e) $\int \cos(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$

f) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

g) $\int \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \arctan(x-2) + c$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1) + c$

j) $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$

k) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c$

l) $\int \frac{1}{4+(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$

Aufgabe 5)

a) $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

b) $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int 1 - \sin^2 x\,dx$
Damit folgt

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int 1\,dx \;\Rightarrow\; \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(-\sin x\cos x + x) + c.$$

Blatt 10

Aufgabe 1)

a) $\int \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{3x+2} + c$

b) $\int (x+1)^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

c) $\int (x^2+7)^8 x\,dx = \frac{1}{18}(x^2+7)^9 + c$

d) $\int \cos^5 x \sin x\,dx = -\frac{1}{6}\cos^6 x + c$

e) $\int \cos(\omega x)\,dx = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x) + c$, falls $\omega \neq 0$ und $\int \cos(\omega x)\,dx = x + c$, falls $\omega = 0$.

f) $\int \sin(\omega x + \phi)\,dx = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \phi)$, falls $\omega \neq 0$ und $\int \sin(\omega x + \phi)\,dx = \sin(\phi)\cdot x + c$, falls $\omega = 0$.

g) Mit $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ erhält man $\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + c$

i) $\int \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}\,dx = \frac{1}{3+\cos x} + c$

Aufgabe 2)

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\,dx = \frac{101}{192}$

b) $\int_1^4 5\sqrt[4]{x}\,dx = 4\cdot(4\sqrt[4]{4}-1) = 4(4\sqrt{2}-1)$

c) $\int_0^2 (3x+1)^2\,dx = 38$

Aufgabe 3)

a) $\int_{-1}^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = 6$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$

c) $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,dx = 0$

Aufgabe 4)

$$\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{7}{9}$$

Aufgabe 5)

Extremstellen von f: In $x = -3$ liegt ein lokales Maximum mit Wert $f(-3) = 54$ und in $x = 3$ ein lokales Minimum mit Wert $f(3) = -54$ vor.

Bestimmung von a, b: $a = -18$ und $b = 0$.

Bestimmung der Fläche zwischen f und g: Der Flächeninhalt ist

$$\int_{-3}^0 (f(x) - g(x))\,dx + \int_0^3 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{81}{2}$$