Aufgabe $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x+2} \overset{x\neq -2}{\Longleftrightarrow} 1 - \frac{1}{2}(x+2) = 2 \Leftrightarrow \cancel{1} - \frac{1}{2}x - \cancel{1} = 2$

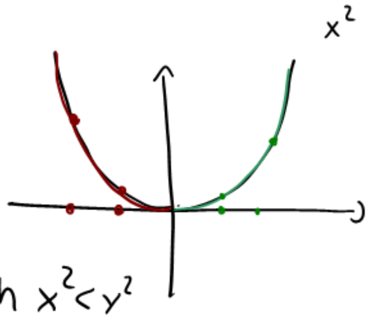
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = 2\cdot(-2) = -4$

Die Folgerung $x<y \Rightarrow x^2<y^2$ ist falsch, denn

$-3<-2$, aber $9=(-3)^2>(-2)^2=4$

$-3<2$, aber $9=(-3)^2>2^2=4$

$-2<3$ und $(-2)^2=4<3^2=9$

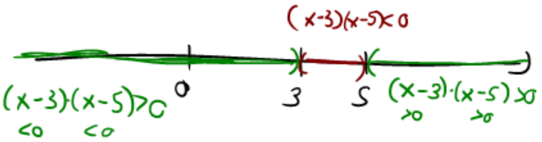


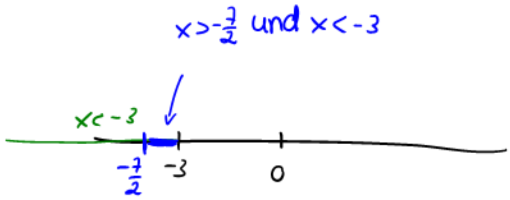
Es gilt aber: Sind $x,y\geq 0$, dann folgt aus $x<y$ auch $x^2<y^2$

Bsp zu 4.4 $2<4$, aber $-6=2\cdot(-3) > 4\cdot(-3) = -12$

$0<2<4$ und $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > 0$

Zusatz: Seien $x,y\geq 0$. Dann gilt $x<y \Leftrightarrow \sqrt{x}<\sqrt{y}$





Bsp: Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $\frac{1}{x+3}<-2$?

1.Fall: $x<-3$, d.h. $x+3<0$. Dann gilt

$\frac{1}{x+3}<-2 \overset{x+3<0}{\Longleftrightarrow} 1 > -2(x+3) \Leftrightarrow 1>-2x-6 \Leftrightarrow 7>-2x$

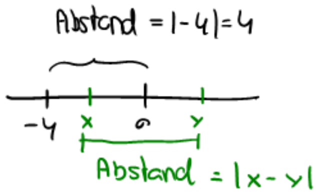
$\Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x$

Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ im Fall $x<-3$ ist $\mathbb{L}_1 = (-\frac{7}{2}, -3)$

2.Fall: $x>-3$, d.h. $x+3>0$. Wegen $\frac{1}{x+3}>0>-2$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2$ in diesem Fall leer, $\mathbb{L}_2=\emptyset$.

Als Lösungsmenge ergibt sich insgesamt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 = (-\frac{7}{2}, -3)$

Bsp zu 4.6 $|-4| \overset{-4<0}{=} -(-4) = 4$



zu Satz 4.3

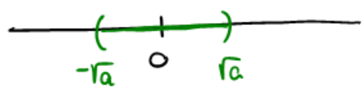
5. $|\underset{x}{5} + (\underset{y}{-3})| = 2 < |5| + |-3| = 5+3 = 8$

6. $|\underset{x}{5} - (\underset{y}{-3})| = |5+3| = 8 > \big|\underbrace{|5|}_{5} - \underbrace{|-3|}_{3}\big| = |2| = 2$

Achtung: $\sqrt{x^2} \neq x$ im Allgemeinen. **Bsp**: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$

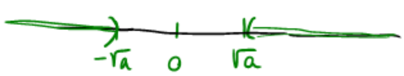
Quadratische Ungleichungen: Sei $a>0$. Dann ist

$x^2<a \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{a} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{a} \Leftrightarrow x\in(-\sqrt{a},\sqrt{a})$

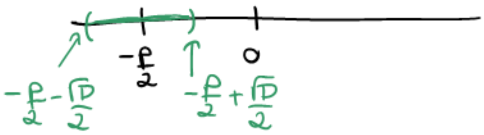


$x^2>a \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{a} \Leftrightarrow |x|>\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{a})\cup(\sqrt{a},\infty)$



Für $D>0$ gilt: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 < \frac{D}{4} \iff \left|x+\frac{p}{2}\right| < \frac{\sqrt{D}}{2} \iff \left|x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right| < \frac{\sqrt{D}}{2}$



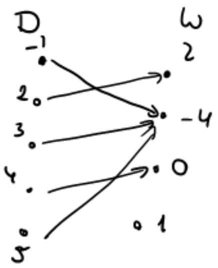
Bsp: $x^2 \underbrace{-6}_{p}x+\underbrace{8}_{q}<0$. Es gilt $D=(-6)^2-4\cdot 8=4>0$.

$$x^2-6x+8<0 \iff x\in\left(\frac{6-\sqrt{4}}{2}, \frac{6+\sqrt{4}}{2}\right)=(2,4)$$

Bsp: $D=[1,2]$, $W=\mathbb{R}$

$f: [1,2]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$

Bsp



Bsp 1.