Kapitel 12 – Skalar- und Vektorprodukt

Definition 12.1 (Skalarprodukt, Norm und Winkel)

1. *Das* SKALARPRODUKT *zweier Vektoren* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ *ist definiert durch*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n.$$

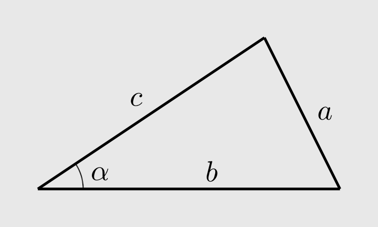
2. *Die* NORM *(oder der* BETRAG*) eines Vektors ist definiert durch*

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

3. *Der* WINKEL $\psi \in [0, \pi]$ *zwischen zwei Vektoren* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$*, wobei beide nicht der Nullvektor sind, ist definiert durch*

$$\cos\psi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

Das Winkel wird über das Skalarprodukt so definiert, dass er mit dem ebenen Winkel im $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt. Hilfsmittel ist der Kosinussatz:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Beispiel: Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1}} = \frac{-3}{5} \Rightarrow \psi = \arccos\left(\frac{-3}{5}\right) \approx 2.2143.$$

Satz 12.2 (Eigenschaften des Skalarproduktes und der Norm)

Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. $\vec{v} \cdot \big(\alpha\vec{w} + \beta\vec{u}\big) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{u}\big)$.
3. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ *genau dann, wenn* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *senkrecht aufeinander stehen.*
4. *Der Vektor* $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *steht senkrecht auf dem Vektor* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
5. $\|\vec{v}\| \geq 0$ *und es gilt:* $\|\vec{v}\| = 0$ *genau dann, wenn* $\vec{v} = \vec{0}$.
6. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$.

Satz 12.3 (Dreiecksungleichung)

Für Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ *gilt:*

1. Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

2. Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\big|\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|\big| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$

Satz 12.4 (Parallelogrammgleichung)

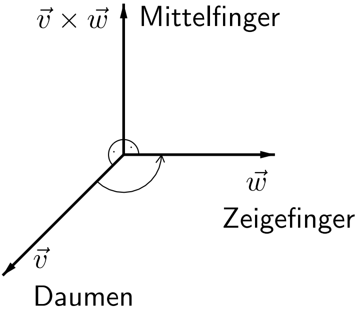
Für Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ *gilt:*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2.$$

Definition 12.5 (Kreuzprodukt)

Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$*. Dann ist das* KREUZPRODUKT *(oder* VEKTORPRODUKT*)* $\vec{v} \times \vec{w}$ *definiert durch*

$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} .$$



Rechte-Hand-Regel

Satz 12.6 (Eigenschaften des Kreuzproduktes)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ *Vektoren und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.
2. $\vec{v} \times \big(\alpha\vec{w} + \beta\vec{u}\big) = \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{u}\big)$.
3. *Ist* ψ *der Winkel zwischen* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *so ist* $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin\psi$.
4. $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ *genau dann, wenn* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *linear abhängig sind.*
5. $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$. *Der Vektor* $\vec{v} \times \vec{w}$ *steht also sowohl auf* $\vec{v}$ *als auch auf* $\vec{w}$ *senkrecht.*
6. $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ *entspricht dem Flächeninhalt des von* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *aufgespannten Parallelogramms.*