Kapitel 2 – Aussagenlogik

Definition 2.1 (Wahrheitswerte, Aussagen)

Eine AUSSAGE A *ist ein feststellender Satz, dem genau einer der beiden* WAHRHEITSWERTE *"wahr" (w) oder "falsch" (f) zugeordnet werden kann.*

Statt "wahr" sagt man oft auch: "richtig", "gilt" oder "trifft zu."

Beispiele:

1. Die Zahl 7 ist eine Primzahl. (wahre Aussage)
2. Mathe ist langweilig. (keine Aussage, da Wahrheitswert subjektiv)
3. Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt. (falsche Aussage, beachte parallele Geraden)
4. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt. (wahre Aussage)
5. Die Zahl x ist positiv. (keine Aussage, da x nicht spezifiziert)
6. Dieser Satz ist falsch. (keine Aussage, da kein Wahrheitswert zuordnerbar)

Definition 2.2 (Operationen auf Aussagen: Junktoren)

Für Aussagen A, B kann man folgende Operationen definieren, die zu neuen Aussagen führen.

1. NEGATION: **nicht** A *Symbol:* $\neg A$.
2. KONJUNKTION: A **und** B *Symbol:* $A \wedge B$.
3. DISJUNKTION: A **oder** B *Symbol:* $A \vee B$.
4. IMPLIKATION: **Aus** A **folgt** B *Symbol:* $A \Rightarrow B$.

Eine weitere Operation ist die

5. ÄQUIVALENZ: A **ist äquivalent zu** B *Symbol:* $A \Leftrightarrow B$.

$$A \Leftrightarrow B \text{ ist definiert als } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

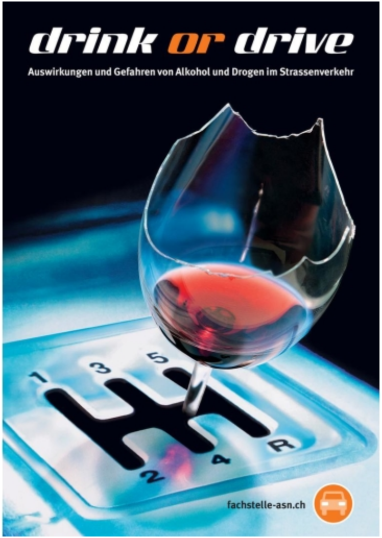
Die neuen Aussagen, die sich aus den Operationen ergeben, werden streng durch Wahrheitstabellen definiert.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Beispiele:

1. $(2 < 4) \wedge (5 < 4)$ ist falsch, $(2 < 4) \vee (5 < 4)$ ist wahr.
2. $(2 < 4) \Rightarrow (5 < 4)$ ist falsch, $(5 < 4) \Rightarrow (2 < 4)$ ist wahr.
3. $(5 < 4) \Rightarrow (6 < 4)$ ist wahr. (Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern).
4. Für eine Aussage A ist $(\neg A) \vee A$ immer wahr (Tautologie).
5. Für eine Aussage A ist $(\neg A) \wedge A$ immer falsch (Kontradiktion).

2. Logik und Alltagssprache



Bemerkung 2.3

1. *Das logische "oder" meint nicht "entweder...oder", sondern ist ein einschließendes "oder" (lat. "vel"- daher das Symbol).*
2. *Das "Und" zwischen Aussagen wird zuweilen nur als Komma geschrieben, z.B. in* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1, x < 2\}$.
3. *Viele Aussagen der Mathematik haben die Form* $A \Rightarrow B$, *wobei*
   - A *die* VORAUSSETZUNG *bzw.* PRÄMISSE *bezeichnet, aus der man*
   - *die* BEHAUPTUNG *bzw.* KONKLUSION B *folgern kann.*

Sprechweisen:

1. Für $A \Rightarrow B$ gibt es neben "Aus A folgt B" die Sprechweisen
   - "Wenn A, dann B", "A ist hinreichend für B", "B ist notwendig für A"
2. Für $A \Leftrightarrow B$ gibt es neben "A äquivalent zu B" die Sprechweisen
   - "A genau dann, wenn B", "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt", "A ist notwendig und hinreichend für B"

Satz 2.4 (Rechenregeln für Junktoren)

Es seien A, B, C Aussagen. Dann gilt:

1. Kommutativität:
$$A \vee B \iff B \vee A$$
$$A \wedge B \iff B \wedge A$$

2. Assoziativität:
$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$$
$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$$

3. Distributivität
$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

4. De Morgansche Regeln:
$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

2. Typische Anfängerfehler

1. Logische Operatoren zwischen ausrechenbaren Termen oder algebraischen Ausdrücken:

   Unsinnig: $x^2 + x \Leftrightarrow x(x+1)$.

   Unsinnig: $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow 0 \vee -1$.

   Sinnig: $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -1)$

2. Aus der Tatsache, dass $A \Rightarrow B$ und B richtig ist, wird geschlossen, dass A richtig ist, z.B.

   Die Folgerung "Wenn es regnet, ist die Straße nass" ist wahr. Aus der Tatsache, dass die Straße nass ist, kann man jedoch nicht schließen, dass es regnet.

3. Aus der Tatsache, dass $A \Rightarrow B$ und A falsch ist, wird geschlossen, dass B falsch ist, z.B.

   $x > 3 \Rightarrow x > 1$ ist für alle reellen Zahlen x wahr.
   Für $x = 2$ ist $x > 3$ zwar falsch, aber $x > 1$ ist richtig.