Kapitel 3 – Zahlen

3. Zahlen

Zahlenbereiche, denen wir schon begegnet sind, sind

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,.$$

Schreibweise von Zahlen als Dezimalentwicklungen bzw. Dezimalbrüche:

Rationale Zahlen (Brüche):

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad -\frac{11}{5} = -2.2, \quad \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0.08$$
$$-\frac{1}{7} = -0.\overline{142857}, \quad \frac{1}{11} = 0.\overline{09}.$$

Vorsicht: $0.\overline{9} = 1.$

Auf dem Zahlenstrahl ist "kein Platz" für eine Zahl zwischen $0.\overline{9}$ und 1, das sind zwei Darstellungen für dieselbe Zahl.

Ebenso: $12.00\overline{9} = 12.01$, $-1.4\overline{9} = -1.5, \ldots$

Definition 3.1 (Rationale und irrationale Zahlen)

1. *Die Menge* $\mathbb{R}$ *der* REELLEN ZAHLEN *ist die Menge der Dezimalbrüche (ohne* $\overline{9}$*).*
2. *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *der* RATIONALEN ZAHLEN *ist die Menge der abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüche.*
3. *Die Elemente der Menge* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, also die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbrüche, heißen* IRRATIONALE ZAHLEN.

Beispiele irrationaler Zahlen:

1. Die Länge der Diagonale eines Quadrates der Seitenlänge 1 ist irrational. Diese Länge ist $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$
2. Der Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 ist irrational. Diese Länge ist $\pi = 3,141592654\ldots$
3. Die EULERSCHE ZAHL $e = 2,718281828\ldots$ ist irrational.

Definition 3.2 (Rechenoperationen)

Sind $x, y \in \mathbb{R}$*, so sind die Rechenoperationen* $x + y$*,* $x - y$*,* xy *und für* $y \neq 0$ *auch* $\frac{x}{y}$ *erklärt.*

Abkürzende Schreibweise: $-x := 0 - x = (-1) \cdot x$

Satz 3.3 (Rechenregeln für Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$)

1. Kommutativgesetze: $x + y = y + x$ *und* $xy = yx$*.*
2. Assoziativgesetze: $x + (y + z) = (x + y) + z$ *und* $x(yz) = (xy)z$
3. Distributivgesetz: $x(y + z) = xy + xz$

Als direkte Konsequenz erhalten wir die drei Binomischen Formeln:

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Definition 3.4 (Kurzschreibweisen für Summen und Produkte)

Sind $m, n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m \leq n$ *und* $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *so schreiben wir*

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ *und*
2. $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$

Dabei kann der LAUFINDEX *eine beliebige (noch nicht anderweitig verwendete) Variable sein, etwa*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j.$$

<u>Vereinbarungen</u> für $m > n$ ("leere Summe" bzw. "leeres Produkt"):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := 1$$

Rechenregeln und Beispiele:

- $a \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (a \cdot a_k)$
- $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$
- $\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$.
- Indexverschiebung: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+t}^{n+t} a_{k-t}$.
- Arithmetische Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- geometrische Summenformel:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ für jede reelle Zahl } q \neq 1.$$

Definition 3.5 (Potenzen)

1. *Für* $a \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *setzen wir* $a^n := \prod_{k=1}^{n} a$.
2. *Für* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *setzen wir* $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.
   $a \in \mathbb{R}$ *heißt die* BASIS *und* $n \in \mathbb{Z}$ *der* EXPONENT *der* POTENZ a^n.

Insbesondere: $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$, aber $0^n = 0$ für alle $n > 0$.

Satz 3.6 (Potenzregeln)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $n, m \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

1. $a^m a^n = a^{n+m}$,
2. $a^n b^n = (ab)^n$,
3. $(a^m)^n = a^{mn}$,

falls die Ausdrücke definiert sind.

Definition 3.7 (Quadratwurzel)

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $b^2 = a$ *so definieren wir*

$$\sqrt{a} := \begin{cases} b & \text{falls } b \geq 0, \\ -b & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

Die Zahl $\sqrt{a}$ *heißt* QUADRATWURZEL VON a *und ist nicht-negativ.*

Satz 3.8 (Existenz der Quadratwurzel)

Die Gleichung $x^2 = a$ *besitzt ...*

- *... für* $a < 0$ *keine reelle Lösung,*
- *... für* $a = 0$ *die eindeutige (reelle) Lösung* $x = 0$ *und*
- *... für* $a > 0$ *die zwei (reellen) Lösungen* $x_1 = \sqrt{a}$ *und* $x_2 = -\sqrt{a}$.

Satz 3.8 lässt sich noch verallgemeinern:

Satz 3.9 (Höhere Wurzeln)

1. *Ist n eine natürliche ungerade Zahl, dann hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung. Diese bezeichnen wir mit $x = \sqrt[n]{a}$.*
2. *Ist n eine natürliche gerade Zahl mit $n \neq 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ ...*
   - *... für $a < 0$ keine reelle Lösung,*
   - *... für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$ und*
   - *... für $a > 0$ die zwei reellen Lösungen, wovon eine positiv und eine negativ ist. Die positive Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt[n]{a}$. Die negative ist dann durch $-\sqrt[n]{a}$ gegeben.*

Beispiele:

$$\sqrt{81} = 9, \quad \sqrt[3]{-27} = -3,$$

$$x^2 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{27} \lor x = -\sqrt{27} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3} \lor x = -3\sqrt{3}$$

Definition 3.10

Sei $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ *und* $a > 0$. *Wir definieren*

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \quad \text{und} \quad a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

Somit haben wir das Potenzieren von ganzen auf rationale Exponenten erweitert.

Man kann zeigen, dass die Rechenregeln aus Satz 3.6 weiterhin gültig bleiben.

Bemerkung 3.11

Mittels Potenzen mit rationalen Exponenten können auch Potenzen a^x *mit reellen Exponenten* $x \in \mathbb{R}$ *definiert werden, indem die reelle Zahl* x *durch rationale Zahlen immer feiner "eingeschachtelt" wird. In Kapitel 10 werden wir beliebige Potenzen etwas anders, nämlich mittels der Exponential- und Logarithmusfunktion einführen.*

Satz 3.12 (*p–q-Formel*)

Es sei $D := p^2 - 4q$.
Dann besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ *...*

- *... die eindeutige (reelle) Lösung* $x = -\frac{p}{2}$*, falls* $D = 0$*,*
- *... die zwei (reellen) Lösungen* $x_1 = -\frac{p+\sqrt{D}}{2}$ *und* $x_2 = -\frac{p-\sqrt{D}}{2}$*, falls* $D > 0$*,*
- *... keine reelle Lösung, falls* $D < 0$*.*

Die Zahl D *heißt* DISKRIMINANTE *der quadratischen Gleichung.*

Empfehlung: Statt der p–q-Formel kann auch die Methode der QUADRATISCHEN ERGÄNZUNG zur Lösung quadratischer Gleichungen genutzt werden.

Definition 3.13 (Fakultät und Binomialkoeffizient)

1. *Für zwei Zahlen* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist die* $\text{F}\textsc{akultät}$ *definiert als*

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

   Insbesondere gilt $0! = 1$ *und* $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$*.*

2. *Für zwei Zahlen* $k, n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $k \leq n$ *ist der* $\text{B}\textsc{inomialkoeffizient}$ *definiert als*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Satz 3.14 (Eigenschaften der Binomialkoeffizienten)

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *und* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(Additionstheorem).*

Wegen des Additiontheorems lassen sich die Binomialkoeffizienten im PASCALSCHEN DREIECK anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & \binom{n}{k} & & & & & n \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4 \\
 & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Satz 3.15 (Binomischer Lehrsatz)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

3. Typische Anfängerfehler

1. Missachtung der binomischen Formeln bzw. des binomischen Lehrsatzes:
$$(a+b)^n \neq a^n + b^n.$$

2. Falsche Wurzelrechnung:
$$\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} \neq \sqrt[4]{5} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} \neq \sqrt[7]{2}.$$

3. Falsche Potenzrechnung:
$$4^2 \cdot 3^2 \neq (4 \cdot 3)^4 \quad \text{und} \quad \left(2^3\right)^4 \neq 2^7.$$

4. Bei quadratischen Gleichungen wird nur die positive Lösung genannt:
$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3.$$

   Die Äquivalenz $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ist falsch.

Kapitel 4 – Ordnung und Betrag