Kapitel 4 – Ordnung und Betrag

Definition 4.1 (Ordnung)

Jede reelle Zahl x hat genau eine der folgenden drei Eigenschaften:

- x *ist negativ:* $x < 0$,
- x *ist gleich Null:* $x = 0$,
- x *ist positiv:* $x > 0$.

Wir definieren...

- *...*$x > y$ *durch* $x - y > 0$,
- *...*$x \geq y$ *durch* $x - y > 0$ *oder* $x - y = 0$

Analog werden $x < y$ *und* $x \leq y$ *definiert.*

Damit gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *genau eine der drei Relationen:*

$$x < y \;\; \textit{oder} \;\; x = y \;\; \textit{oder} \;\; x > y.$$

Die Zeichen $\leq, \geq, <, >$ *und* $=$ *heißen* ORDNUNGSZEICHEN.

Mit Hilfe der Ordnungszeichen definieren wir spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 4.2 (Intervalle)

Beschränkte Intervalle:

- ABGESCHLOSSENES INTERVALL: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
- OFFENES INTERVALL: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
- HALBOFFENES INTERVALL: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$
- HALBOFFENES INTERVALL: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$

Unbeschränkte Intervalle:

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$ *und* $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$ *und* $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Notation: Manchmal werden offene Grenzen auch mit eckigen Klammern notiert, d.h. $]a, b[$ statt (a, b), $[a, b[$ statt $[a, b)$ usw.

Satz 4.3 (Rechenregeln)

Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. *Ist $x < y$ und $y < z$, dann gilt $x < z$.*
2. *Ist $x < y$ dann ist $x + z < y + z$.*
3. *Ist $z > 0$ und $x < y$, so ist $xz < yz$.*

Folgerung 4.4

- *Es gilt $x = y$ genau dann, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.*
- *Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $xy > 0$.*
- *Ist $z < 0$ und $x < y$, so ist $xz > yz$.*
- *Ist $0 < x < y$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.*
- *Ist $0 \leq x < y$, so gilt $x^2 < y^2$.*

Satz 4.5 (Vorzeichen von Produkten)

Es seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ *ist äquivalent dazu, dass es mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $x_j = 0$.*
2. $\prod_{i=1}^{n} x_i \geq 0$ *ist äquivalent dazu, dass gar keine oder nur eine gerade Anzahl der Faktoren x_j negativ ist.*

Beispiel:

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, die $(x-3)(x-5) > 0$ erfüllen.

Fallunterscheidung ($x = 3$ und $x = 5$ ausgeschlossen):

$$\underbrace{x < 3,}_{\text{beide Faktoren } <0} \quad \underbrace{x \in (3,5),}_{\text{ein Faktor } <0} \quad \underbrace{x > 5}_{\text{beide Faktoren } >0}$$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x-5) > 0\} = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$.

Definition 4.6 (Betrag)

Der $\textsc{Betrag}$ $|x|$ *einer reellen Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *ist definiert als der Abstand von* x *zu* 0*:*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ *ist* $|x - y|$ *der Abstand von* x *und* y*.*

Der Betrag "löscht" das Vorzeichen von x.

Satz 4.7 (Eigenschaften des Betrags)

1. $|x| = 0$ *ist äquivalent zu* $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$ *mit Gleichheit an genau einer Stelle, wenn* $x \neq 0$.
4. $|xy| = |x||y|$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
6. $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.
7. $\sqrt{x^2} = |x|$.

Satz 4.8 (Quadratische Ungleichungen)

Es gilt

$$x^2 + px + q < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \frac{D}{4}\,,$$

wobei $D = p^2 - 4q$ *die Diskriminante ist.*

- *Falls* $D \leq 0$ *,so hat* $x^2 + px + q < 0$ *keine Lösung.*
- *Für* $D > 0$ *gilt*

$$x^2 + px + q < 0 \;\Leftrightarrow x \in \left(\frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \frac{-p + \sqrt{D}}{2}\right).$$

Für die umgekehrte Ungleichung $x^2 + px + q > 0$ *gilt*

- *Falls* $D < 0$, *so ist* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + px + q > 0\} = \mathbb{R}$.
- *Für* $D \geq 0$ *gilt:*

$$x^2 + px + q > 0 \;\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-p - \sqrt{D}}{2}\right) \cup \left(\frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \infty\right).$$

4. Typische Anfängerfehler

1. Wurzelziehen und Quadrieren wird gegenseitig aufgehoben:

$$\sqrt{(-4)^2} \neq -4, \text{ sondern } \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4.$$

2. Bei Multiplikation von Ungleichungen mit negativen Zahlen wird das Ordnungszeichen nicht umgedreht:

$$-2x < -8 \not\Leftrightarrow x < 4.$$

3. Ungleichungen werden quadriert:

$$-4 < -2 \not\Leftrightarrow (-4)^2 < (-2)^2.$$

4. Falsche Betragsrechnung:

$|4-6| \neq |4| - |6|$ und $|x+6| \neq |x| + |6|$ (betrachte z.B. $x = -2$).