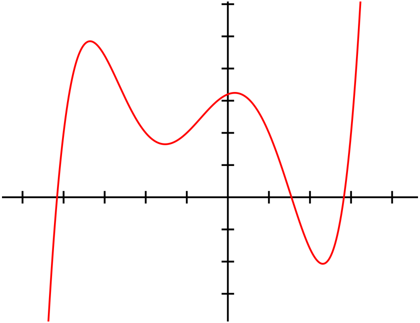
Kapitel 5 – Abbildungen und Funktionen

5. Was ist eine Funktion?

Eine erste spontane Idee ist...



By Krishnavedala - Own work, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37743955

Die Funktionsvorschrift lautet übrigens:

$$f(x) = \frac{(x+4)(x+2)(x-1)(x+1)(x-3)}{20} + 2$$

Definition 5.1 (Abbildung/Funktion)

Es seien D und W nichtleere Mengen. Eine ABBILDUNG *f von D nach W ist eine Vorschrift, die* **jedem** *Element $x \in D$* **genau ein** *Element $y \in W$ zuordnet. Man schreibt dafür $y = f(x)$.*

Eine Abbildung wird in folgender Form angegeben:

$$f : D \to W, \quad x \mapsto f(x).$$

Die Notation "$f(x)$" liest man als "f von x". Sie deutet an, dass f das ARGUMENT x in den FUNKTIONSWERT $f(x)$ überführt.

Bezeichnungen

In der Funktionsangabe $f : D \to W, \quad x \mapsto f(x)$ sind enthalten:

- f der Name bzw. das Symbol für die Funktion.
- D der DEFINITIONSBEREICH der Funktion.
- W der WERTEBEREICH oder WERTEVORRAT der Funktion.
- x das Argument der Funktion.
- $f(x)$ der FUNKTIONSWERT an der Stelle x bzw. das BILD von x unter f.

Definition 5.2 (Gleichheit von Abbildungen)

Zwei Abbildungen $f : D_1 \to W_1$ und $g : D_2 \to W_2$ sind GLEICH, $f = g$, *wenn*

1. $D_1 = D_2$,
2. $W_1 = W_2$,
3. *für alle $x \in D_1$ gilt: $f(x) = g(x)$.*

5. Beispiele und Schreibweisen

1. Für $D = \{-1, 2, 3, 4, 5\}$ und $W = \{2, -4, 0, 1\}$ definieren wir $f : D \to W$ durch

$$f(-1) = -4,\ f(2) = 2,\ f(3) = -4,\ f(4) = 0,\ f(5) = -4.$$

2. Oft lassen sich Abbildung mit Hilfe einer einheitlichen Funktionsvorschrift definieren:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x-2}$$

   Alternative Schreibweisen:

$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \ni x \mapsto \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R},$$

$$f(x) := \frac{1}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

3. Wird die Definitionsmenge nicht angegeben, so ist die im Kontext maximal mögliche Menge gemeint.

5. Beispiele und Schreibweisen

1. Funktions- und Variablennamen sind frei wählbar. Beispielsweise ist

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + 1$$

eine Abbildung, die einer natürlichen Zahl n ihren "Nachfolger" $n + 1$ zuordnet.

2. Manche Funktionen werden Abschnittsweise definiert:

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

3. Abrunden: $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq x\}$.
4. Aufrunden: $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \geq x\}$.

   Beispiel: $\lceil \pi \rceil = 4, \quad \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x-2}$ ist keine Funktion, da für $x = 2$ kein Funktionswert definiert ist.

Definition 5.3

Seien $f : D \to W$ eine Abbildung, $U \subset D$ und $V \subset W$. Wir definieren:

1. *Das* BILD *von U unter f:*

$$f(U) := \{y \in W \,|\, \exists x \in U : y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in U\} \subset W.$$

   Spezialfall: $f(D)$ heißt BILDMENGE *von f.*

2. *Das* URBILD *von V unter f:*

$$f^{-1}(V) := \{x \in D \,|\, f(x) \in V\} \subset D.$$

3. *Der* (FUNKTIONS)GRAPH *von f:*

$$\{(x, f(x) \,|\, x \in D\} \subset D \times W.$$

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ gilt

$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty), \quad f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\}, \quad f^{-1}(\{-4\}) = \emptyset.$$

Definition 5.4 (Verkettung von Abbildungen)

Es seien $f : D \to U$ *und* $g : V \to W$ *Abbildungen und es gelte* $U \subset V$*.* *Dann ist die* $\textsc{Verkettung}$ $g \circ f : D \to W$ *definiert durch*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))\,.$$

Statt Verkettung sagt man auch Hintereinanderausführung oder Komposition. Man liest $g \circ f$ *als "*g *nach* f*" oder "*g *verknüpft mit* f*".*

Beispiel: Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto -2y$. Dann gilt

$$(g \circ f)(x) = -2(x^3) = -2x^3$$
$$(f \circ g)(y) = (-2x)^3 = -8y^3$$

Fazit: Die Verkettung ist im Allgemeinen nicht vertauschbar.

Die IDENTISCHE ABBILDUNG oder IDENTITÄT

$$\mathrm{id}_D : D \to D, \quad x \mapsto x$$

erfüllt für alle Funktionen $f : D \to W$ und $g : W \to D$

$$f \circ \mathrm{id}_D = f \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_D \circ g = g.$$

Definition 5.5 (Umkehrabbildung)

Zwei Abbildungen $f : D \to W$ und $g : W \to D$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_D \quad \textit{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_W$$

sind UMKEHRABBILDUNGEN/UMKEHRFUNKTIONEN/INVERS *zueinander.*

Schreibweise: $g = f^{-1}$ bzw. $f = g^{-1}$.

Eine Abbildung $f : D \to W$ besitzt genau dann eine Umkehrabbildung, wenn für jedes $y \in W$ die Gleichung $f(x) = y$ eine eindeutige Lösung $x \in D$ besitzt. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist dann diejenige Abbildung, die jedem y das entsprechende x zuordnet, $f^{-1}(y) = x$.

Vorsicht: Nicht jede Abbildung hat eine Umkehrabbildung:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0,$
- $g : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}, \quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$
- $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + 1.$

Die Funktionen f, g, h, S besitzen keine Umkehrfunktion.

5. Beispiel: Berechnung von Umkehrfunktionen

Gesucht: Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 4x - 2$.

Strategie: Löse die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf:

$$y = 4x - 2 \Leftrightarrow y + 2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{4} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}.$$

Betrachte also die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y) := \frac{y}{4} + \frac{1}{2}$.

Kontrolle: Es gilt tatsächlich $f^{-1} = g$, denn:

- $(g \circ f)(x) = \frac{(4x-2)}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4x}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$,
- $(f \circ g)(y) = 4\left(\frac{y}{4} + \frac{1}{2}\right) = 4\frac{y}{4} - 2 = y + \frac{4}{2} - 2 = y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y)$.

Bemerkung 5.6

Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden.

Definition 5.7 (Monotonie)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f ...

1. ... MONOTON WACHSEND, *wenn für alle $a, b \in D$ mit $a < b$:*

$$f(a) \leq f(b).$$

2. ... STRENG MONOTON WACHSEND, *wenn für alle $a, b \in D$ mit $a < b$:*

$$f(a) < f(b).$$

3. ... MONOTON FALLEND, *wenn für alle $a, b \in D$ mit $a < b$:*

$$f(a) \geq f(b).$$

4. ... STRENG MONOTON FALLEND, *wenn für alle $a, b \in D$ mit $a < b$:*

$$f(a) > f(b).$$

Beispiel: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend.

Definition 5.8 (Polynome)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt POLYNOM, *falls für alle $x \in \mathbb{R}$ entweder $p(x) = 0$ oder*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit KOEFFIZIENTEN $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *wobei $a_n \neq 0$. Speziell heißt:*

- a_n *der* LEITKOEFFIZIENT *von p,*
- n *der* GRAD *von p, geschrieben $\mathrm{grad}(p)$.*

Der Grad des Null-Polynoms wird als $-\infty$ definiert.

Definition 5.9 (Nullstelle)

Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$ heißt NULLSTELLE *von p.*

Satz 5.10 (Faktorisierung)

Es sei p ein Polynom und x_0 eine Nullstelle. Dann gibt es ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) = \mathrm{grad}(p) - 1$, so dass $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

Das Polynom q aus der Faktorisierung lässt sich durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Hornerschemas bestimmen.

Frage: Wie findet man Nullstellen eines Polynoms?

Satz 5.11 (Rationale Nullstellen)

Für ein Polynom p mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gilt: Ist x_0 eine rationale Nullstelle, $x_0 = \frac{a}{b}$ (in voll gekürzter Darstellung), so ist...

1. *...a Teiler von a_0 (dem konstanten Term),*
2. *...b Teiler von a_n(dem Leitkoeffizienten).*

Definition 5.12 (Rationale Funktionen)

Es seien p und q Polynome. Dann heißt die Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Funktionsvorschrift $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ RATIONALE FUNKTION. *Ihr Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.*

Die Nullstellen des Nennerpolynoms q sind Definitionslücken der rationalen Funktion f. Sie können "Löcher" oder "Pole" sein:

- $\frac{1}{x}$ hat in $x = 0$ einen Pol.
- $\frac{1}{1+x^2}$ hat keine Definitionslücke.
- $\frac{2x}{x}$ hat in $x = 0$ eine hebbare Definitionslücke.

5. Typische Anfängerfehler

1. Nichtbeachtung der Reihenfolge bei der Verkettung von Funktionen: Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - 2$ und $g(y) = y^2$ gilt

$$(g \circ f)(x) = (x-2)^2 \neq x^2 - 2.$$

2. Die Umkehrabbildung einer Funktion f wird durch den Kehrwert von f gebildet: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ gilt

$$f^{-1}(y) \neq \frac{1}{y^3} \quad \text{(tatsächlich ist } f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}\text{)}.$$

3. Die Begriffe Urbild und Umkehrfunktion werden verwechselt. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ existiert keine Umkehrfunktion, aber

$$f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\},$$

das Urbild von der Menge $\{4\}$, natürlich schon.