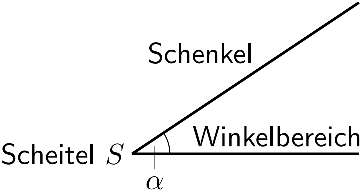
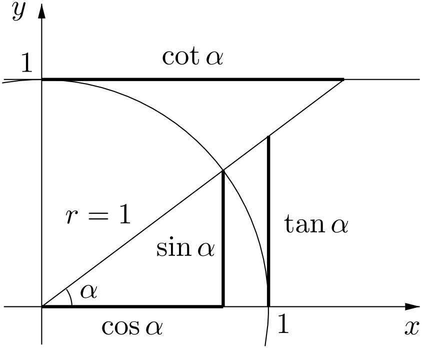
Kapitel 6 – Trigonometrie



Winkel werden in GRAD oder im BOGENMASS (auch RAD) angegeben: $360° \widehat{=} 2\pi$.

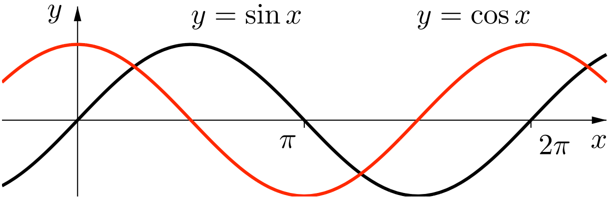


Durch diese Betrachtungen am Einheitskreis werden vier Funktionen definiert.

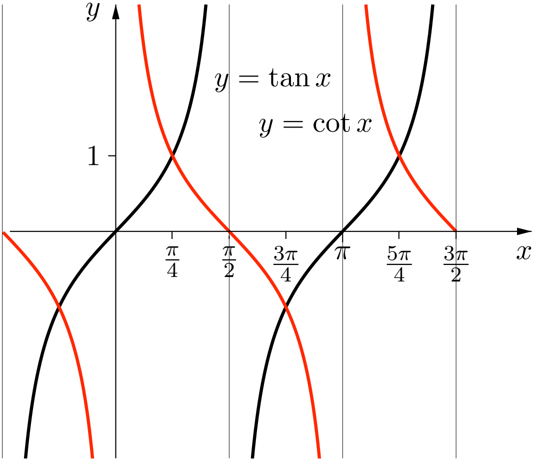
Definition 6.1 (Winkelfunktionen)

Name		D	W
Sinus	$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Cosinus	$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Tangens	$\tan$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Kotangens	$\cot$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

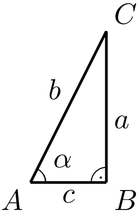
Die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktionen



Die Graphen der Tangens- und Kotangensfunktionen:



Bemerkung 6.2 (Interpretation am rechtwinkligen Dreieck)



Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\,, \quad \cos\alpha = \frac{c}{b} \quad \textit{und} \quad \tan\alpha = \frac{a}{c}$$

Spezielle Werte der Winkelfunktionen:

x in Grad	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x in Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Eselsbrücke für die Sinus-Werte:

x in Grad	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Definition 6.3 (Periodische Funktionen)

Es sei $T > 0$. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* T-PERIODISCH, *wenn* $f(x+T) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

$\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch, $\tan$ und $\cot$ sind π-periodisch.

Definition 6.4 (Symmetrie von Funktionen)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ *ein um* 0 *symmetrisches Intervall. Eine Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *heißt ...*

1. ... GERADE, *wenn* $f(-x) = f(x)$ *für alle* $x \in I$.
2. ... UNGERADE, *wenn* $f(-x) = -f(x)$ *für alle* $x \in I$.

Satz 6.5 (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

1. $\sin$ *sowie* $\cos$ *sind* 2π- *und* $\tan$ *sowie* $\cot$ *sind* π*-periodisch.*
2. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *und* $\cos(x+\pi) = -\cos x$.
3. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ *und* $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$.
4. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *und* $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.
5. $\cos$ *ist eine gerade Funktion und* $\sin$, $\tan$ *und* $\cot$ *sind ungerade Funktionen.*
6. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $|\sin x| \leq 1$ *und* $|\cos x| \leq 1$.
7. $\sin(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.
   $\cos(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.
8. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *(*TRIGONOMETRISCHE PYTHAGORAS*).*
9. $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ *und* $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x}$.

Bemerkung 6.6 (Einschränkungen der Winkelfunktionen)

Die folgenden Einschränkungen der Winkelfunktionen benutzt man zur Definition von Umkehrfunktionen:

1. $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ *ist streng monoton wachsend.*
2. $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ *ist streng monoton fallend.*
3. $\tan\big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*
4. $\cot\big|_{(0,\pi)} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend.*

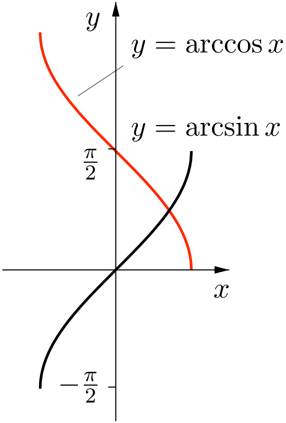
Man kann zeigen, dass diese Einschränkungen jeweils Umkehrfunktionen besitzen.

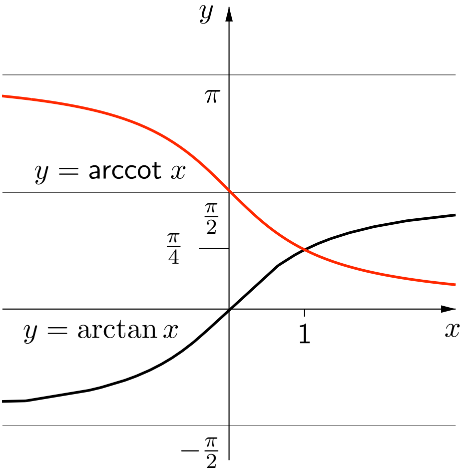
Definition 6.7 (Arcusfunktionen)

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden Arcusfunktionen genannt und sind

1. $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
3. $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
4. $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \left]0, \pi\right[$

Die Graphen der Arcusfunktionen sehen wie folgt aus:





Beim Rechnen mit Winkelfunktionen sind folgende ADDITIONSTHEOREME sehr nützlich:

Satz 6.8 (Additionstheoreme)

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
3. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Daraus erhält man:

Folgerung 6.9 (Doppelte Winkel)

1. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$ *und* $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$

Eine kleine Beweisskizze für die Additionstheoreme: